ตำรา การคำนวณทาง วิศวกรรมเครื่องกล

MECHANICAL COMPUTATION ENGINEERING

ผศ. ดร. ยศธนา คุณาทร
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ตำรา
การคำนวณทาง
วิศวกรรมเครื่องกล

MECHANICAL COMPUTATION ENGINEERING

ผศ. ดร. ยศธนา คุณาทร
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

คำนำ

การคำนวณขั้นสูงในงานด้านวิศวกรรมเครื่องกล หรืองานวิจัยทางด้านวิศวกรรมมักจะเป็นการคำนวณหาคำตอบจากระบบสมการคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อน จึงจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือเข้ามาช่วยในการคำนวณ ปัจจุบันคอมพิวเตอร์ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณอย่างแพร่หลาย ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคือเทคนิคหนึ่งที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณดังกล่าวโดยอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งจะช่วยคำนวณหาคำตอบ หรือจำลองลักษณะปัญหาทางวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องได้ รวมไปถึงการประยุกต์ใช้ในงานวิจัยอื่น ๆ อย่างแพร่หลาย เช่น การคำนวณด้านพลศาสตร์ของของไหล (Computational fluid dynamics) เป็นต้น

ตำราเล่มนี้ได้ถูกเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สำหรับการเรียนการสอนในวิชาการคำนวณทางวิศวกรรมเครื่องกล (Mechanical Engineering Computation) รหัสวิชา 254701 **หลักสูตรปริญญาโท/เอก** สาขาวิศวกรรมเครื่องกลและวิศวกรรมพลังงาน ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีเนื้อหาครอบคลุมที่ทุกหัวข้อที่สอนในชั้นเรียนครบถ้วนตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร และมีบทที่เป็นการเพิ่มเติมกรณีศึกษาที่ผู้สอนได้มีประสพการณ์การนำเอาไปใช้งานจริงมาเรียบเรียงมาไว้เพื่อให้ผู้เรียนได้ศึกษาเป็นแนวทางในการนำเอาไปประยุกต์ใช้งานที่เกี่ยวข้องต่อไป เนื่องจากเป็นกระบวนวิชาในระดับปริญญาโท/เอก การเรียบเรียงเนื้อหาในตำราเล่มนี้เน้นพื้นฐานการสร้างความเข้าใจในเทคนิคระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อให้ผู้เรียนได้มีความเข้าใจ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานได้จริง โดยไม่ได้เน้นไปที่หลักการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือการใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ภาษาใดภาษาหนึ่ง หากแต่เน้นไปที่ลำดับการและขบวนการแก้ปัญหา แต่ผู้สอนได้แสดงรหัสเทียม (Pseudo code) ของการคำนวณไว้ให้ผู้เรียนได้นำไปประยุกต์ใช้ในกับภาษาที่ตนเองถนัดต่อไป

คำศัพท์ทางเทคนิคที่เป็นภาษาอังกฤษที่ใช้ในเอกสารคำสอนนี้ ผู้สอนได้พยายามใช้คำภาษาไทยให้เหมาะสมที่สุดเท่าที่จะกระทำได้ และให้สื่อความหมายให้ถูกต้องเหมาะสมมากที่สุด ทั้งนี้ผู้สอนได้เขียนคำศัพท์ภาษาอังกฤษประกอบไว้ในเนื้อหาด้วย เพื่อความเข้าใจที่ถูกต้อง ในบางตอนอาจจะมีการใช้คำศัพท์ภาษาอังกฤษเข้ามาประกอบการอธิบาย ทั้งนี้ก็เพื่อเป็นการสื่อความหมายด้านเทคนิคที่เป็นสากล

ผู้สอนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารคำสอนนี้ จะเป็นประโยชน์ให้กับนักศึกษา หรือ ผู้เรียนที่มีความสนใจที่จะนำเอาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรม หรืองานวิจัยบ้างไม่มากก็น้อย หากการเรียบเรียงครั้งนี้มีข้อผิดพลาดประการใด ผู้สอนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ และผู้สอนขอน้อมรับข้อเสนอแนะทุกประการเพื่อนำไปปรับปรุงเนื้อหาให้สมบูรณ์ขึ้นต่อไป

ผศ. ดร. ยศธนา คุณาทร
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

แผนการสอน (Course Syllabus)

ชื่อกระบวนวิชา การคำนวณทางวิศวกรรมเครื่องกล
(Mechanical Engineering Computation)
รหัสกระบวนวิชา วศ.ก. 701 (254701)
ภาคการศึกษาที่ 2

อาจารย์ผู้สอน: ผศ.ดร. ยศธนา คุณาทร
ห้องพักอาจารย์ ชั้น M ห้อง M21 อาคาร 30 ปี คณะวิศวกรรมศาสตร์
e-mail yottana.k@cmu.ac.th

รายละเอียดกระบวนวิชา:

นักศึกษาจะได้เรียนรู้หลักการและพื้นฐานของวิธีการเชิงตัวเลขที่ประกอบไปด้วย การแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ระบบสมการเชิงเส้น การฟิตเส้นโค้ง การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) การประมาณค่าอินทิเกรตด้วยวิธีการเชิงตัวเลข และการหาอนุพันธ์ของสมการ วิธีการแก้ปัญหาของสมการอนุพันธ์แบบสามัญ (Ordinary differential equations) และ สมการอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) รวมไปถึงการนำเอาคอมพิวเตอร์มาใช้เป็นเครื่องมือในการประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมเครื่องกลที่เกี่ยวข้องด้วยวิธีการเชิงตัวเลขที่ได้อธิบายไว้เนื้อหาดังกล่าวข้างต้น

วัตถุประสงค์:

1. เพื่อให้นักศึกษามีพื้นฐานและเข้าใจหลักการคำนวณเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรมเครื่องกล
2. เพื่อให้นักศึกษาสามารถประยุกต์ใช้ทักษะการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม

กำหนดการเรียนการสอน:

เวลาที่ใช้สำหรับเนื้อหาแต่ละส่วนที่มีลำดับแสดงไว้ดังตารางข้างล่างนี้ ส่วนข้อมูลอื่น ๆ เกี่ยวกับการบ้าน การทดสอบย่อย เรื่องแจ้งให้ทราบ ข้อมูลและข่าวสาร ให้นักศึกษาติดตามใน ชั่วโมงเรียนของวิชานี้

ตารางการเรียนการสอน/ตารางการส่งการบ้าน

สัปดาห์	เนื้อหา	Assignment
1	บทที่ 1: บทนำ (Introduction)	
2	บทที่ 1:บทนำ (ต่อ)	การบ้านบทที่ 1
3	บทที่ 2: ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น (System of nonlinear equations)	
4	บทที่ 2: ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น (ต่อ)	การบ้านบทที่ 2
5	บทที่ 3: ระบบสมการเชิงเส้น (Systems of linear equations)	
6	บทที่ 3: ระบบสมการเชิงเส้น (ต่อ)	การบ้านบทที่ 3
7	บทที่ 4: การฟิตเส้นโค้ง และการประมาณค่าในช่วง (Curve fitting and interpolation)	
8	บทที่ 4: การฟิตเส้นโค้ง และการประมาณค่าในช่วง (ต่อ)	การบ้านบทที่ 4
9	สอบกลางภาค	
10	บทที่ 5: การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration)	
11	บทที่ 5: การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (ต่อ)	การบ้านบทที่ 5
12	บทที่ 6: การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical differentiation)	การบ้านบทที่ 6
13	บทที่ 7: สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equations)	
14	บทที่ 7: สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ต่อ)	การบ้านบทที่ 7
15	บทที่ 8: สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations)	
16	บทที่ 8: สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (ต่อ)	การบ้านบทที่ 8
17	ทบทวนเนื้อหาทั้งหมด	Term project
	สอบปลายภาค	

คะแนน คะแนนแบ่งเป็น 4 ส่วน คือ

1. การบ้าน 10%
2. Term Project 20%
3. สอบกลางภาค (เนื้อหาในส่วนแรก สัปดาห์ที่ 1 - 8) 35%
4. สอบปลายภาค (เนื้อหาในส่วนที่สอง สัปดาห์ที่ 10 – 17) 35%

เกณฑ์การสอบผ่านและการตัดเกรด

การตัดเกรดจะพิจารณาทั้งแบบอิงเกณฑ์ โดยเกณฑ์ คือ

≥ 85	เกรด A	65 – 70	เกรด C
80 – 85	เกรด B+	60 – 65	เกรด D+
75 – 80	เกรด B	50 – 60	เกรด D
70 – 75	เกรด C+	< 50	เกรด F

ตำรา และหนังสืออ้างอิงประกอบการสอน

1. ยศธนา คุณาทร, การคำนวณทางวิศวกรรมเครื่องกล, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2023 (ตำราเล่มนี้)
2. Atkinson K. and Han W., Elementary Numerical Analysis(Third Edition), John Wiley & Sons, Inc., US, 2004.
3. Rao S. S., Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists, Pearson Education, 2002
4. Borse G. J., Numerical Methods with MATLAB: A Resource for Scientists and Engineers, PWS Publishing Company, U.S.A., 1997.
5. Hoffman Joe D., Numerical Methods for Engineers and Scientists, McGraw-Hill, Inc., US, 1992.
6. Chapra S.C., Clough D.E., Applied Numerical Methods with PYTHON for Engineers and Scientists, McGraw Hill LLC, 2022

สารบัญ

คำนำ . . . . . ก

1 บทนำ 1

1.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 2

1.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3

1.3 ค่าความคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 4

1.4 ซอฟต์แวร์สำหรับใช้ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 5

แบบฝึกหัดท้ายบท 7

2 การหารากของสมการ 9

2.1 ระเบียบวิธีแบบกำหนดค่าคร่อมราก **(Bracketing method)** 11

2.1.1 ระเบียบวิธีกราฟิก (Graphical method) 11

2.1.2 ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) 12

2.1.3 ระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด (False position method) 17

2.2 ระเบียบวิธีแบบเปิด **(Open method)** 22

2.2.1 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดคงที่ (Fixed-point iteration) 22

2.2.2 ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton–Raphson method) 24

2.2.3 ระเบียบวิธีซีแคนท์ (Secant method) 27
2.2.4 ระเบียบวิธีโมดิฟายซีแคนท์ (Modified Secant method) 32

2.3 รากของสมการพหุนาม (Root of polynomials) 33

2.3.1 ระเบียบวิธีของมูลเลอร์ (Müller's method) 35
2.3.2 ระเบียบวิธีแบร์สโตว์ (Bairstow's method) 37

แบบฝึกหัดท้ายบท 40

3 ระบบสมการเชิงเส้น 45

3.1 ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ (Gauss elimination method) 47

3.2 ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน (Gauss–Jordan elimination method) 52

3.3 ระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชัน (LU decomposition method) 56

3.3.1 ระเบียบวิธีของเคราท์ (Crout's method) 57
3.3.2 ระเบียบวิธีของดูลิตเติ้ล (Doolittle's method) 58
3.3.3 ระเบียบวิธีของโคเลสกี้ (Choleski's method) 58
3.3.4 การหาคำตอบด้วยระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชัน 59

3.4 ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี (Jacobi iteration method) 62

3.5 ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel iteration method) 66

3.6 ระเบียบวิธีผ่อนปรนสืบเนื่อง (Successive relaxation method) 68

3.7 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีแก้ปัญหาโดยตรง 70

3.7.1 จำนวนการคำนวณของระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ 70
3.7.2 จำนวนการคำนวณของวิธีอื่น ๆ 72

แบบฝึกหัดท้ายบท 74

4 การฟิตเส้นโค้ง (Curve fitting) 81

4.1 การฟิตด้วยคอลโลเคชันแบบพหุนาม (Collocation polynomial fit) 82

4.2 การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Least squares regression) 85

4.2.1 การถดถอยเชิงเส้น (Linear regression) 86
4.2.2 การถดถอยพหุนาม (Polynomial regression) 92
4.2.3 การถดถอยไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Regression) 95

4.2.4 การทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearization) 97
4.2.5 การถดถอยหลายตัวแปร (Multiple variables regression) 99

4.3 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) 102

4.3.1 การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น (Linear Interpolation) 102
4.3.2 การประมาณค่าในช่วงควอดราติก (Quadratic interpolation) 103
4.3.3 การประมาณค่าในช่วงแบบพหุนามลำดับขั้นที่ n^{th} (n^{th} – order Polynomial Interpolation) 106
4.3.4 การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนาม (Spline Interpolation) 108

แบบฝึกหัดท้ายบท 118

5 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration) 123

5.1 สูตรของนิวตัน-โคตส์ (Newton - cotes formulas) 123

5.1.1 กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular rule) 124
5.1.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) 126
5.1.3 ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error) ของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู 127

5.2 กฎของซิมป์สัน (Simpson's rule) 130

5.2.1 กฎของซิมป์สัน 1/3 (Simpson's one - third rule) 130
5.2.2 กฎของซิมป์สัน 3/8 (Simpon's three – eighth's rule) 134
5.2.3 ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error) ของกฎของซิมป์สัน 138

5.3 การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน (Richardson's extrapolation) 140

5.3.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู 141
5.3.2 กฎซิมป์สัน 1/3 143

5.4 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ 144

5.4.1 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่มีลิมิตอนันต์ (Numerial integration with infinite limits) . . . 144
5.4.2 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่มีความเป็นสภาวะเอกฐาน (Numerical integration with singularities) 145

5.5 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขในสองและสามมิติ 146

แบบฝึกหัดท้ายบท 149

6 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical differentiation) 155

6.1 พื้นฐานของการประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่อง (Finite difference) 155

6.2 ผลต่างแบบสืบเนื่องจากอนุกรมเทย์เลอร์ 157

6.2.1 การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง 160

6.2.2 การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องผลต่างแบบสืบเนื่องสำหรับอนุพันธ์อันดับสอง 162

6.2.3 การประมาณค่าอนุพันธ์ลำดับสูงด้วยผลต่างแบบสืบเนื่อง 165

6.2.4 การประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่องที่มีความแม่นยำสูงขึ้น 166

6.3 ตัวดำเนินการผลต่าง (Difference operators) 172

6.4 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ตัวดำเนินการผลต่าง 174

6.5 การหาอนุพันธ์ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม 175

6.5.1 อนุกรมกำลังของการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม (Power Series Interpolating Polynomial) 175

6.5.2 การประมาณค่าในช่วงพหุนามของนิวตัน (Newton's interpolation polynomial) 178

6.6 การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องของอนุพันธ์ย่อย 179

แบบฝึกหัดท้ายบท 183

7 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ: ปัญหาค่าเริ่มต้น 187

7.1 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's method) 188

7.1.1 ผลเฉลยจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 191

7.1.2 ผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ 193

7.1.3 ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีออยเลอร์ 193

7.2 การปรับปรุงและดัดแปลงระเบียบวิธีของออยเลอร์ 194

7.2.1 การใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับสูงขึ้น 195

7.2.2 ระเบียบวิธีของฮวน (Heun's method) 198

7.2.3 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (Improved or modified Euler's) 201

7.3 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา (Runge–Kutta method) 202

7.3.1 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่หนึ่ง (First-order Runge–Kutta) 204

7.3.2 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง (Second–order Runge-Kutta) 204

7.3.3 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สาม 207

7.3.4 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สี่ 207

7.3.5 การประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาด้วยระเบียบวิธีประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน 209

7.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ **211**

แบบฝึกหัดท้ายบท **212**

8 สมการเชิงอนุพันธ์ : ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต 217

8.1 ระเบียบวิธีการยิง (Shooting method) **218**

8.1.1 วิธีการคำนวณทั่วไปสำหรับระบบสมการ จำนวน n สมการ 223

8.2 ระเบียบวิธีผลต่างแบบจำกัด **226**

8.2.1 ผลเฉลยของระบบสมการอันดับสอง 226

8.2.2 เงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ใช่ค่าคงที่ 230

แบบฝึกหัดท้ายบท **236**

9 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย 237

9.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบอิลิปติก (Elliptic) **238**

9.1.1 ขอบเขตการคำนวณที่มีรูปร่างไม่ปกติ 242

9.2 สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิก **246**

9.2.1 ระเบียบวิธีโดยชัดแจ้ง 247

9.2.2 ระเบียบวิธีโดยปริยาย 249

9.3 ระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสัน (Crank–Nicolson method) **254**

9.4 สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิกสองมิติ **255**

9.5 สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทไฮเปอร์โบลิก **256**

9.5.1 วิธีผลต่างแบบจำกัดสำหรับสมการอันดับที่หนึ่ง (First-order) 257

9.5.2 วิธีสำหรับสมการอันดับสอง (Second-order) 259

แบบฝึกหัดท้ายบท **264**

10 การประยุกต์ใช้ในงานวิชาการ และกรณีศึกษา 267

10.1 การคำนวณหารูปร่างความเร็วของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม **267**

10.2 การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียรองของหัวฝักบัว **270**

10.3 การศึกษาการไหลแบบพัลส์ในท่อตรง **272**

บรรณานุกรม 276

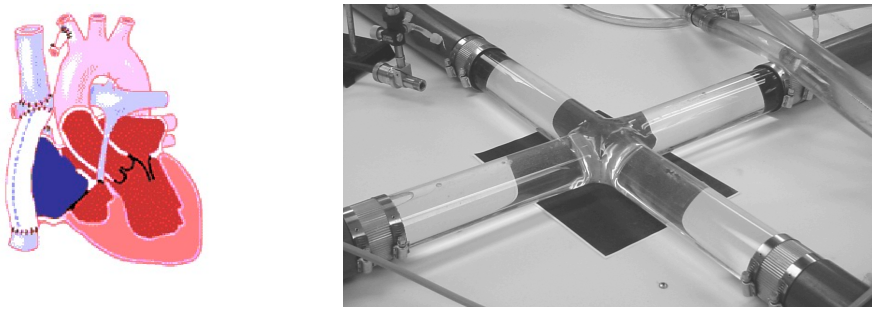
1. บทนำ

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j}\sum_{a,b} t$$

1.1	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	2
1.2	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์	3
1.3	ค่าความคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	4
1.4	ซอฟต์แวร์สำหรับใช้ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	5
	แบบฝึกหัดท้ายบท	7

การแก้ปัญหาทางวิศวกรรมเกือบทั้งหมดล้วนเกิดจากการหาคำตอบจากความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ ทางกายภาพที่อธิบายถึงพฤติกรรมของระบบของวิศวกรรมนั้น ๆ หรือสามารถเรียกอีกอย่างได้ว่า แบบจำลองของระบบนั่นเอง สมการคณิตศาสตร์ก็เป็นแบบจำลองทางวิศวกรรมประเภทหนึ่ง แบบจำลองทางวิศวกรรมสามารถแบ่งได้เป็น 3 ประเภทใหญ่ ๆ คือ

1. แบบจำลองการทดลอง (Experimental Model) คือการสร้างแบบจำลองเหมือนจริงของสิ่งที่ต้องการศึกษา ซึ่งอาจจะมีขนาดเท่าหรือไม่เท่ากับของจริงก็ได้ เพื่อศึกษาผลกระทบของตัวแปรต่าง ๆ ต่อแบบจำลอง หรือผลของรูปร่างแบบจำลองต่อตัวแปรที่เกี่ยวข้อง ทั้งภายนอกหรือภายในของแบบจำลองนั้นจากการวัด ดังแสดงในรูปที่ 1.1



(ก) (ข)

รูปที่ 1.1: การทดลองเพื่อศึกษาลักษณะการไหลของเลือดในการผ่าตัดเชื่อมเส้นเลือดแบบ Total cavopulmonary connection ขนาดขยายสี่เท่า (ก) ภาพร่างของการผ่าตัดเชื่อมเส้นเลือดแบบ Total cavopulmonary connection (ข) แบบจำลองการทดลองของการผ่าตัดเชื่อมเส้นเลือดแบบ Total cavopulmonary connection ขนาดขยายสี่เท่า (ที่มา Khunatorn et al. 2002 [14])

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือ สมการคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรม หรือปรากฏการณ์ทางกายภาพหรือขบวนการต่าง ๆ

3. แบบจำลองเชิงตัวเลข คือ เทคนิคที่ปรับเปลี่ยนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้นและสามารถคำนวณหาคำตอบได้ ด้วยระเบียบวิธีทางพีชคณิต โดยทั่วไปการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขมักจะมีปริมาณการคำนวณทางพีชคณิตที่สูงมาก

1.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ก่อนที่จะมีการนำเอาคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้ การแก้ปัญหาทางวิศวกรรมนิยมทำด้วย 3 วิธีต่าง ๆ ดังนี้

1. การคำนวณคำตอบด้วยการแก้สมการคณิตศาสตร์ หรือที่เรียกว่า วิธีอนาลิติคัล (Analytical method) ซึ่งสามารถนำเสนอพฤติกรรมของบางระบบได้เป็นอย่างดี อย่างไรก็ตามระเบียบวิธีนี้มักจะถูกจำกัดให้ใช้งานได้กับบางระบบที่ไม่ซับซ้อนมากเท่านั้น เช่น ระบบที่ผ่านสมมติฐานเพื่อให้รูปแบบสมการคณิตศาสตร์ลดความซับซ้อนลง เป็นต้น คำตอบที่ได้จากวิธีนี้จะเป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าของตัวแปรตามที่ต้องการคำนวณกับค่าของตัวแปรต้นของระบบ

2. วิธีทางกราฟิก ใช้ศึกษาพฤติกรรมของระบบด้วยการพล็อตกราฟ และสามารถประยุกต์ใช้กับงานที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ แต่วิธีนี้จะได้ความแม่นยำน้อย

3. การคำนวณระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยไม่ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยหลักการแล้ววิธีนี้จะเน้นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการแก้ปัญหาที่ซับซ้อน ซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นเทคนิคในการประมาณค่าคำตอบแทนที่จะแก้สมการหาคำตอบโดยตรง ทำให้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีการคำนวณเป็นปริมาณมาก และขั้นตอนที่ยุ่งยาก ทำให้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใช้ทรัพยากรในการคำนวณสูง คำตอบที่ได้จากวิธีนี้มักจะไม่ได้คำตอบเป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าของตัวแปรตามที่ต้องการคำนวณ กับค่าของตัวแปรต้นของระบบเหมือนกับวิธีแบบอนาลิติคัล แต่จะได้คำตอบเป็นตัวแปรตามที่ต้องการคำนวณ ณ ค่าตัวแปรต้นนั้น ๆ ของระบบเลยโดยตรง

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงมีการพัฒนามาพร้อม ๆ กับขีดความสามารถของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์เพราะปริมาณการคำนวณที่ต้องทำมีจำนวนมาก เนื่องด้วยเทคโนโลยีของคอมพิวเตอร์ปัจจุบันที่มีขีดความสามารถในการคำนวณที่สูงมาก ทำให้ข้อจำกัดด้านเวลาในการคำนวณของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขลดลง จึงสามารถประยุกต์ใช้แบบจำลองเชิงตัวเลขกับสมการคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนได้ รวมไปถึงการวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ดีขึ้น ทำให้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในปัจจุบันเป็นเครื่องมือที่สามารถช่วยแก้ปัญหาระบบสมการทางด้านวิศวกรรมที่มีความซับซ้อน และระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ รวมไปถึงงานบางอย่างที่ไม่สามารถแก้ด้วยวิธีอนาลิติคัลได้

1.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การใช้แบบจำลองเชิงตัวเลขมาเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหานั้นหากจะใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุดผู้ใช้จะต้องมีความเข้าใจในพื้นฐาน ของระบบที่ต้องการศึกษาเสียก่อน โดยปกติพฤติกรรมของระบบที่ต้องการศึกษาจะแสดงอยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์ที่เรียกว่ากฎพื้นฐาน ทั้งนี้การจะเข้าใจกฎพื้นฐานทางวิศวกรรมนั้นต้องมีความเข้าใจในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน โดยทั่วไปโครงสร้างของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{matrix}\text{Dependent}\\ \text{Variable}\end{matrix} = f\left(\begin{matrix}\text{Independent}\\ \text{Variables}\end{matrix}, \text{Parameters}, \begin{matrix}\text{Force}\\ \text{Functions}\end{matrix}\right) \tag{1.1}$$

โดยที่

Dependent variable (ตัวแปรตาม)	คือตัวแปรตามที่เป็นผลลัพธ์ของระบบที่ต้องการทราบค่า
Independent variable (ตัวแปรต้น)	คือตัวแปรต้น หรือ ตัวแปรอิสระ ที่ใช้เป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรตาม โดยทั่วไปจะเป็นมิติของระบบ ระยะทางและเวลา
Parameters (พารามิเตอร์)	เป็นคุณสมบัติหรือค่าคงที่ขององค์ประกอบของระบบ
Force functions (ฟอร์ซ ฟังก์ชัน)	เป็นอิทธิพลจากภายนอกที่มีผลกระทบต่อระบบ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีรูปแบบตั้งแต่สมการพีชคณิตง่าย ๆ ไปจนถึงระบบสมการอนุพันธ์ที่ซับซ้อน ซึ่งตัวอย่างสมการพีชคณิตอย่างง่าย ได้แก่ กฎข้อที่สองของนิวตัน

$$F = ma \tag{1.2}$$

โดยที่

F คือ แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุ (N หรือ kg.m/s^2)

m คือ มวลของวัตถุ (kg)

a คือ ความเร่งของวัตถุ (m/sec^2)

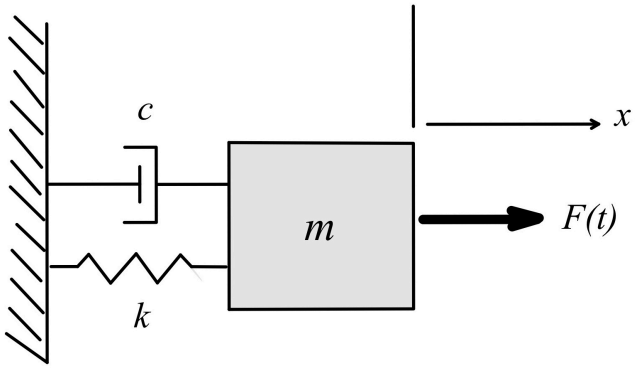
ถ้าจัดรูปสมการ (1.2) ใหม่ดังนี้

$$a = \frac{F}{m} \tag{1.3}$$

โดยที่ a เป็นตัวแปรตาม, F เป็น ฟอร์ซ ฟังก์ชัน (Force function) ที่กระทำต่อระบบ และ m คือ พารามิเตอร์ที่

เป็นคุณสมบัติของระบบ ในสมการ (1.3) ไม่มีตัวแปรต้น เนื่องจากยังไม่มีการศึกษาการเปลี่ยนแปลงความเร่งต่อระยะทางหรือเวลา สมการ (1.3) แสดงให้เห็นถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายที่สามารถคำนวณหาคำตอบด้วยวิธีพีชคณิตง่าย ๆ แต่ในงานทางด้านวิศวกรรมจริง ๆ แล้ว จะมีความซับซ้อนกว่านี้ จึงต้องใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ที่สูงกว่ามาคำนวณหาคำตอบ เช่น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การเคลื่อนที่ของระบบสปริง/มวล แบบมีแรงแดมพ์ และแรงภายนอกมากระทำ ดังแสดงในรูปที่ 1.2 ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + f(t) \tag{1.4}$$



รูปที่ 1.2: การเคลื่อนที่ของระบบสปริง/มวล แบบมีแรงแดมพ์ และแรงภายนอกมากระทำ

โดยที่ค่า m คือมวลของวัตถุ, k คือค่าคงที่ของสปริง, c ค่าคงที่ของการแดมพ์, $f(t)$ แรงภายนอกที่กระทำต่อระบบ ณ เวลาใด ๆ และ x คือระยะขจัดของวัตถุจากตำแหน่งสมดุล จะเห็นได้ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ และการคำนวณหาคำตอบจะต้องใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ หรือวิธีแปรตัวพารามิเตอร์ ซึ่งมีความซับซ้อนมากขึ้น

1.3 ค่าความคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีคำนวณเชิงตัวเลขนั้น สามารถประเมินได้จากค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นจะมีความคลาดเคลื่อนหลัก ๆ ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error) เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการใช้วิธีประมาณค่าเข้ามาคำนวณหาคำตอบแทนที่จะใช้วิธีคำนวณสมการคณิตศาสตร์นั้นโดยตรง เช่น การประมาณค่าของอนุกรมอนันต์ (Infinite series) ด้วยการตัดปลายอนุกรมให้เหลือจำนวนพจน์ที่จำกัด หรือการใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องในการคำนวณเพื่อประมาณค่าคำตอบของสมการอนุพันธ์ เป็นต้น ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ได้ดังนี้

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

การคำนวณฟังก์ชันข้างต้นด้วยจำนวนพจน์ เพียงแค่ n พจน์ จะทำให้ส่วนที่เหลือที่ตัดทิ้งไปไม่นำมาคำนวณนั้นเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลายนั่นเอง

2. ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Round-off error) เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปัดเศษตัวเลขทิ้งในการคำนวณเชิงตัวเลขจะเกี่ยวข้องกับปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์กับตัวเลข เช่น การบวก/ลบ การคูณ/หาร เป็นต้น ซึ่งตัวเลขที่กล่าวถึงนี้จะมีทั้ง เลขจำนวนเต็ม เลขจำนวนจริง ที่จะมีทั้งจำนวนจริงที่มีทศนิยมจำกัด หรือจำนวนจริงที่มีทศนิยมไม่จำกัด เช่น π = 3.1415926535... เป็นต้น แต่คอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขนั้น จะมีความสามารถในการเก็บข้อมูลตัวเลขที่จำกัด ปกติแล้วคอมพิวเตอร์จะมีการเก็บข้อมูลตัวเลขจำนวนจริงด้วย ระเบียบวิธีเก็บจำนวนจุดลอย (Floating-point number) แทนการเก็บค่าจำนวนจริง ซึ่งจะใช้แมนทิสซา (Mantissa) และ เลขชี้กำลัง (Exponent) ให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$m \times b^e$$

โดยที่ m คือค่าแมนทิสซา b คือค่าระบบเลขฐานที่ใช้ และ e คือค่าตัวเลขชี้กำลัง ตัวอย่างเช่น ค่าจำนวนจริง $1/31 = 0.032258064516\ldots$ สามารถเขียนในรูปแบบของจุดลอยที่มีความสามารถเก็บค่าแมนทิสซาเป็นตัวเลขนัยสำคัญห้าตัวได้ดังนี้ 0.32258×10^{-1} จะเห็นได้ว่าคอมพิวเตอร์ไม่สามารถเก็บค่าที่แท้จริงของจำนวนจริงที่มีทศนิยมไม่จำกัดได้ และจำนวนเศษที่ถูกตัดทิ้งเนื่องจากเกินความสามารถในการเก็บข้อมูลก็คือความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษนั่นเอง ความคลาดเคลื่อนประเภทนี้จะส่งผลต่อผลการคำนวณสูงในกรณีที่มีการคำนวณระหว่างค่าตัวเลขที่มีค่ามากแต่มีค่าความแตกต่างระหว่างตัวเลขในการคำนวณนั้นน้อย โดยทั่วไประบบคอมพิวเตอร์ที่มีการเก็บข้อมูลตัวเลขแบบ 32 บิต และ 64 บิต จะสามารถเก็บตัวเลขนัยสำคัญได้จำนวน จำนวน 7 ตัว และ 13 ตัว ตามลำดับ

1.4 ซอฟต์แวร์สำหรับใช้ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ไมโครซอฟต์ เอ็กซ์เซล (Microsoft Excel) เป็นสเปรดชีทพัฒนาโดยบริษัทไมโครซอฟต์ มีลักษณะเก็บข้อมูลเป็นตาราง โดยที่ผู้ใช้สามารถทำการใส่สูตรคำนวณทางคณิตศาสตร์จากค่าข้อมูลที่อยู่ในเซลล์ ต่าง ๆ ที่ใช้เก็บข้อมูลได้ด้วยการอ้างอิงพิกัดของเซลล์จากตำแหน่งแถว และตำแหน่งคอลัมน์ ในตารางเก็บข้อมูลนั้น ๆ เมื่อข้อมูลในเซลล์ที่ถูกอ้างอิงในสูตรคำนวณเปลี่ยน Excel ก็จะทำการอัปเดทผลการคำนวณให้ใหม่ทันที และ Excel ยังมีสูตรสำเร็จพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย มีเครื่องมือที่ช่วยในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ข้อมูล และสามารถสร้างกราฟในการแสดงผลข้อมูลทำเป็นเครื่องมือหนึ่งที่สามารถนำมาแก้ปัญหาทางวิศวกรรมด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ง่าย มี

ความเร็วรวดในการทำงาน แต่จะเหมาะสมกับข้อมูลไม่มีความซับซ้อนมาก หรือ ข้อมูลอยู่ในสภาวะที่พร้อมใช้งาน นอกจากนั้น Excel ยังรองรับการเขียนโปรแกรมด้วยภาษา Visual Basic for Application (VBA) เพื่อสั่งงานการทำงานให้เป็นอัตโนมัติ โดยมี มาโคร (Marco) เป็นตัวจัดลำดับการทำงานของโปรแกรม แต่ Excel ยังมีข้อจำกัดในการเรื่องของการประมวลผลกับข้อมูลที่มีจำนวนมาก และยังไม่สามารถเชื่อมต่อกับระบบฐานข้อมูลประเภทอื่น ๆ ได้

Matlab เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ระดับสูงที่ใช้สำหรับคำนวณเชิงตัวเลข แสดงผลกราฟิก และพัฒนาเป็นแอพลิเคชั่นได้ ทำให้ผู้ใช้สามารถคำนวณผลลัพธ์ พัฒนาอัลกอริทึ่ม สร้างแบบจำลอง และแอพลิเคชั่นได้ง่ายและรวดเร็ว โปรแกรม Matlab ประกอบด้วยภาษาคอมพิวเตอร์ และกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ซึ่งเป็นที่รวบรวมชุดโปรแกรม และคำสั่งที่เป็นเครื่องมือสำหรับการคำนวณ และการวิเคราะห์ประเภทต่าง ๆ ที่ผู้ใช้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในโปรแกรมของตนเองได้ Matlab มักจะถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล การประมวลผลสัญญาณ (Signal processing) การสื่อสารข้อมูล (Data communication) การประมวลผลภาพและวิดีโอ (Image and video processing) ระบบควบคุม (Control system) และอื่น ๆ อีกมากมาย Matlab จึงเป็นหนึ่งในภาษาที่นักวิทยาศาสตร์และวิศวกรใช้มากที่สุด โดยเฉพาะระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

C++ เป็นภาษาคอมพิวเตอร์พื้นฐานที่มีการใช้งานกันอย่างแพร่หลายภาษาหนึ่งในปัจจุบัน ผู้ใช้งานจะต้องมีพื้นฐานการเขียนโปรแกรมเบื้องต้นก่อน โดย ภาษาซี (C) เป็นการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (Object oriented programming) พัฒนาขึ้นโดยบริษัทไมโครซอฟต์ เช่นเดียวกับไมโครซอฟต์ เอ็กซ์เซล ภาษาซี สามารถเขียนโปรแกรมออกมาเป็นวินโดว์แอพลิเคชั่น (Windows application) และสามารถใช้เชื่อมต่อกับระบบฐานข้อมูลได้ ผู้พัฒนาสามารถเขียนโปรแกรมนำข้อมูลจากระบบฐานข้อมูลมาประมวลผลได้ ทำให้สามารถวิเคราะห์ข้อมูลที่มีความซ้ำซ้อนกันหลายชั้นได้ นำข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ออกมาแสดงผลได้อย่างชัดเจน อีกยังประมวลผลข้อมูลที่มีจำนวนมากได้

Python เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาหลัง ภาษาซี โดยที่ Python เป็นภาษาที่รองรับการเขียนโปรแกรมได้หลายแบบทั้งแบบแอพลิเคชั่น แบบเว็บแอพลิชั่น และแบบคำสั่งข้อความ (Command prompt) เนื่องจาก Python เป็นภาษาที่ยังคงถูกพัฒนาอยู่ตลอดเวลาในปัจจุบัน นักพัฒนาระบบจึงได้สร้างที่เก็บรวบรวมชุดคำสั่ง (Library) สามารถนำมาใช้งานกับโปรแกรมสำหรับให้ผู้ใช้งานได้เลย Python นิยมใช้ในการพัฒนาใน วิเคราะห์ข้อมูลต่าง ๆ การคำนวณเชิงสถิติ รวมไปจนถึงการคำนวณทางด้านวิศวกรรมต่าง ๆ นอกจากนั้นแล้วภาษา Python ยังสามารถพัฒนาไปประยุกต์ใช้ได้ในเกือบทุกระบบปฏิบัติการ Python จึงเป็นอีกเครื่องมือหนึ่งที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในปัจจุบัน

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงใช้อนุกรม เทย์เลอร์ อันดับหนึ่ง และอันดับสอง ในการประมาณค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\frac{1-x}{1+y}$$

2. จงเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของการคำนวณค่า $y = e^x$ ณ ตำแหน่ง $x = 10$ และ $x = -10$ จาก จำนวนเทอมการคำนวณต่าง ๆ

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

3. จงคำนวณหารากของสมการ $x^2 - 90x + 1 = 0$ โดยใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง และเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนที่ได้

4. จงคำนวณหาปริมาตรของหยดน้ำรูปทรงกลม ตั้งแต่ที่เวลา 0 ถึง 10 จากสมการของอัตราการระเหยของหยดน้ำต่อไปนี้

$$\frac{dV}{dt} = kA$$

โดยที่ V คือปริมาตรของหยดน้ำ ($mm.^3$), t คือเวลา (min), $k = 0.1$ คืออัตราการระเหย (mm/min), A คือพื้นที่ผิวหยดน้ำ (mm^2) ถ้าหากที่เวลาเริ่มต้นหยดน้ำมีรัศมีเท่ากับ 3 mm

2. การหารากของสมการ

2.1	ระเบียบวิธีแบบกำหนดค่าคร่อมราก (Bracketing method)	11
2.2	ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)	22
2.3	รากของสมการพหุนาม (Root of polynomials)	33
	แบบฝึกหัดท้ายบท	40

การคำนวณหารากของสมการคือวิธีการคำนวณหาตำแหน่งที่ค่าของสมการเป็นศูนย์ หรือที่เรียกอีกอย่างว่า "ราก" ของสมการ เป็นเทคนิคหนึ่งที่ใช้ในการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear equations system) ซึ่งมักจะพบได้ทั่วไปในโจทย์ปัญหาทางด้านวิศวกรรม และในบางครั้งสมการเหล่านี้จะไม่สามารถหาคำตอบด้วยวิธีวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ปกติได้โดยตรง หากกล่าวถึงรากสมการคณิตศาสตร์มักจะนึกถึงสมการพหุนาม (Polynomial equation) อันดับสอง

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

โดยที่คำตอบของสมการ (2.1) มีค่าเท่ากับ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.2}$$

ค่า x จะเป็นค่าที่ทำให้ $f(x) = 0$ นั่นก็คือรากของสมการ แต่รากของสมการที่อยู่ในรูปแบบอื่น ๆ อาจจะหาค่าได้ไม่ง่ายเหมือนกับตัวอย่างข้างต้น ตารางที่ 2.1 แสดงถึงตัวอย่างการวิเคราะห์ด้านวิศวกรรมด้านต่าง ๆ ที่ต้องอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยหาคำตอบ พิจารณาการคำนวณของอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วต่อเวลาของวัตถุ ที่ตกลงมา

ตารางที่ 2.1: งานด้านวิศวกรรมที่อาจจะต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาด้วยการหารากของสมการ

สาขาวิศวกรรม	การใช้รากของสมการในการคำนวณ
วิศวกรรมเครื่องกล	การคำนวณหาอุณหภูมิ ณ ตำแหน่ง และเวลา ใด ๆ
วิศวกรรมเครื่องกล	การคำนวณหาขนาด และทิศทางของแรง ณ ตำแหน่ง และเวลา ใด ๆ
วิศวกรรมเครื่องกล	การคำนวณหาความเร่ง ความเร็ว และตำแหน่ง ณ ตำแหน่ง และเวลา ใด ๆ
วิศวกรรมเคมี	การคำนวณหาความเข้มข้นของสาร ณ ตำแหน่ง และเวลา ใด ๆ

ตามแนวดิ่งด้วยแรงโน้มถ่วงของโลกแบบมีแรงต้านอากาศ ดังรูปที่ 2.1 โดยการประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกฎข้อที่สองของนิวตัน

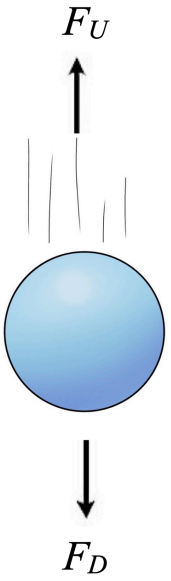
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{2.3}$$

โดยที่ dv/dt คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วต่อเวลา แรงลัพธ์ภายนอกที่กระทำต่อวัตถุที่ประกอบด้วย แรงจากแรงโน้มถ่วงของโลก (F_D) และแรงต้านอากาศ (F_U)

$$F = F_D + F_U = mg - cv \tag{2.4}$$

g คือค่าคงที่ของแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าเท่ากับ 9.81 m/sec^2 และ c คือค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านของวัตถุซึ่งขึ้นอยู่กับความเร็ว ดังนั้น

$$dv/dt = \frac{(mg - cv)}{m} = g - \frac{c}{m}v \tag{2.5}$$



รูปที่ 2.1: รูปแสดงแผนภาพของแรงที่กระทำต่อวัตถุ F_D คือแรงโน้มถ่วงของโลกมีทิศทางลงในแนวดิ่ง และF_U คือแรงต้านอากาศมีทิศทางขึ้นในแนวดิ่ง

สมการ (2.5) อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ ซึ่งจะต้องใช้วิธีการแก้สมการอนุพันธ์เข้ามาคำนวณหาคำตอบ ถ้าที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$) ความเร็วของวัตถุเท่ากับศูนย์ ($v = 0$) จะได้คำตอบทั่วไปคือ

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) \tag{2.6}$$

จากสมการ (2.6) จะเห็นได้ว่า ลักษณะของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และสามารถคำนวณหาค่าคำตอบของความเร็ว ณ เวลาใด ๆ ได้โดยตรง หากรู้ค่าตัวแปรทั้งหมดทางด้านขวามือของสมการ สมการที่มีลักษณะแบบนี้เรียกว่า ฟังก์ชันเอ็กซ์พลิซิท (Explicit) แต่ถ้าหากตัวแปรที่ต้องการทราบค่าคือสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ (c) จากสมการข้างต้น จะพบว่าไม่สามารถจัดรูปสมการแยกให้สัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ (c) มาอยู่ข้างใดข้างหนึ่งของสมการได้ สมการรูปแบบนี้เรียกว่า ฟังก์ชันอิมพลิซิท (Implicit) ดังนั้นจึงต้องนำเอาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหารากของสมการมาใช้ในการหาคำตอบโดยเขียนสมการ (2.6) ใหม่ดังนี้

$$f(c) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t}) - v \tag{2.7}$$

ค่า c ที่ทำให้ $f(c) = 0$ คือรากของสมการและเป็นค่าสัมประสิทธิแรงต้านที่เป็นคำตอบของสมการ ซึ่งสามารถหาค่าได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ดังจะได้อธิบายในส่วนต่อไป

2.1 ระเบียบวิธีแบบกำหนดค่าคร่อมราก (Bracketing method)

เทคนิคการหารากสมการวิธีนี้อาศัยหลักการที่ว่า ค่าของฟังก์ชันจะเปลี่ยนเครื่องหมายในบริเวณใกล้รากของสมการ ดังนั้นเทคนิคนี้จึงจะต้องอาศัยการเดาค่าเริ่มต้นสองค่าที่ตกคร่อมอยู่ทั้งสองด้านของรากสมการขึ้นมาก่อน จากนั้นจึงจะมีวิธีการขยับค่าที่คร่อมอยู่ให้ลู่เข้าหาคำตอบ ซึ่งวิธีการขยับค่าที่คร่อมรากให้ลู่เข้าหาคำตอบ สามารถทำได้หลายวิธี โดยรายละเอียดมีดังนี้

2.1.1 ระเบียบวิธีกราฟิก (Graphical method)

วิธีที่ง่ายวิธีหนึ่งในการหารากสมการก็คือ การพล็อตกราฟของฟังก์ชัน แล้วหาตำแหน่งที่กราฟตัดกับแกน x ซึ่งค่า x ที่ตำแหน่งนี้จะเป็นตำแหน่งประมาณของรากสมการ

ตัวอย่าง 2.1. *จงใช้ระเบียบวิธีกราฟิกในการหาค่ากราฟแรงต้านอากาศ c ของวัตถุที่มีน้ำหนัก 68.1 kg. มีความเร็ว 40 m/sec ที่เวลา 10 sec*

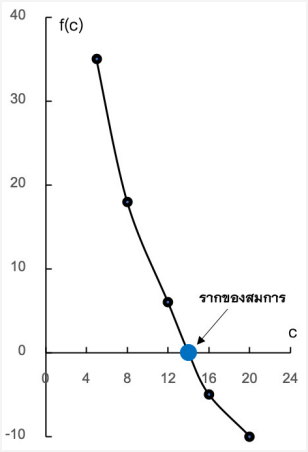
จากสมการ (2.7) *แทนค่าเข้าไปในสมการจะได้ว่า*

$$f(c) = \frac{9.81 \times 68.1}{c}(1 - e^{-(c/68.1)10}) - 40 \tag{2.8}$$

แทนค่า c ต่าง ๆ กัน ลงในสมการข้างต้นจะได้ค่าของฟังก์ชัน $f(c)$ ดังในตาราง

c	4	8	12	16	20
$f(c)$	34.115	17.653	6.067	-2.269	-8.401

นำค่า c และ $f(c)$ จากในตารางมาพล็อตเป็นกราฟจะพบว่ากราฟตัดแกน x ที่ระหว่างค่า c เท่ากับ 12 และ 16 โดยจะมีค่าอยู่ที่ประมาณ c = 14.75 ดังแสดงในรูปที่ 2.2 และ ถ้านำค่านี้ไปแทนค่าในสมการ (2.8) *จะได้ว่า*



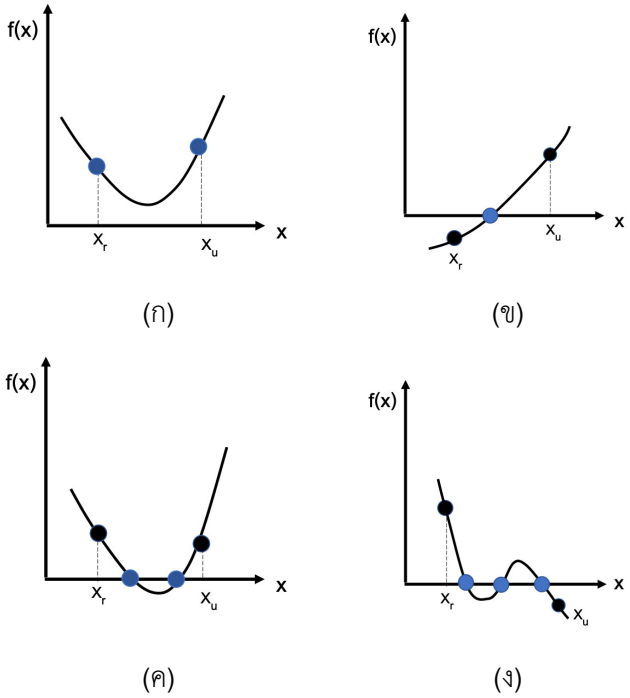
รูปที่ 2.2: การประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีทางกราฟิก

$$f(c) = \frac{667.38}{14.75}(1 - e^{-(0.146843)(14.75)}) - 40 = 0.059$$

ค่าของฟังก์ชันที่ได้จากวิธีกราฟิกมีค่าใกล้เคียงกับค่าศูนย์ หากนำไปแทนค่าลงในสมการ (2.7) จะพบว่า v = 40.059 m/sec ซึ่งใกล้เคียงกับค่าความเร็วที่กำหนดไว้คือ 40 m/sec จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีกราฟิกนี้จะไม่ค่อยแม่นยำมากนัก อย่างไรก็ตามวิธีนี้เป็นวิธีที่ง่ายและสามารถนำไปใช้ในการประมาณค่ารากสมการแบบคร่าว ๆ ได้ และยังสามารถนำไปใช้ในการประมาณค่าเริ่มต้นของระเบียบวิธีแบบคร่อมรากอื่น ๆ เพื่อนำไปหาค่ารากของสมการที่แม่นยำกว่าต่อไปได้ นอกจากนั้นแล้ววิธีนี้ยังสามารถช่วยในการวิเคราะห์ลักษณะของฟังก์ชันได้ว่ามีรากของสมการเกิดขึ้นในช่วงที่สนใจหรือไม่ หรือมีรากของสมการมากกว่าหนึ่งค่าเกิดขึ้นในช่วงที่สนใจ ดังแสดงในรูป 2.3

2.1.2 ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ถ้าฟังก์ชันของสมการ $f(x)$ เป็นจำนวนจริง และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว ถ้าหากค่าของ $f(x_l)f(x_u) < 0$ จะมีรากจริงของสมการอยู่ในช่วงระหว่าง x_l และ x_u อย่างน้อยหนึ่งค่า ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะมีการคำนวณหารากของสมการได้โดยการแบ่งช่วงระหว่าง x_l และ x_u ออกเป็นสองช่วงเท่า ๆ กัน โดยที่ค่าจุดกึ่งกลางระหว่างสองจุดคือ x_r



รูปที่ 2.3: รูปแบบการเกิดรากแบบต่าง ๆ ของสมการที่มีโอกาสเกิดขึ้นในช่วงที่สนใจ (ก) ไม่มีรากของสมการ (ข) มีรากของสมการหนึ่งราก (ค) และ (ง) มีรากของสมการมากกว่าหนึ่งราก

สามารถคำนวณได้จาก

$$x_r = \frac{(x_l + x_u)}{2}$$

จากนั้นจะนำค่า x_r มาคำนวณหาค่าประมาณของรากสมการตามเงื่อนไขดังนี้

1. ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ รากของสมการจะอยู่ระหว่างค่า x_l และ x_r ให้แทนค่า $x_u = x_r$ แล้วทำการวนรอบคำนวณหาค่า x_r ใหม่

2. ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ รากของสมการจะอยู่ระหว่างค่า x_r และ x_u ให้แทนค่า $x_l = x_r$ แล้วทำการวนรอบคำนวณหาค่า x_r ใหม่

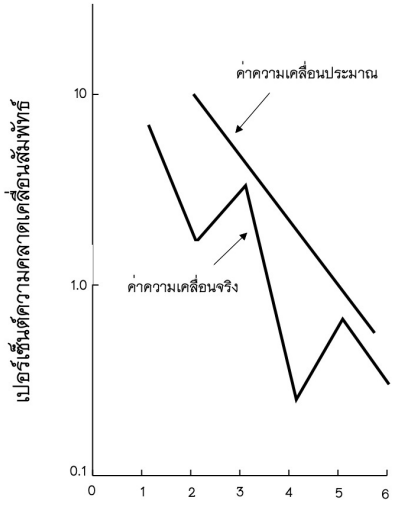
3. ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$, x_r คือรากของสมการ

การคำนวณของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะทำการคำนวณวนซ้ำ ไปเรื่อย ๆ จนกว่าค่า $f(x_l)f(x_r) = 0$ ซึ่งจะมีรอบการคำนวณที่มาก และใช้เวลาในการคำนวณนาน ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดเงื่อนไขให้หยุดการคำนวณเพื่อไม่ให้สิ้นเปลืองเวลาในการคำนวณ โดยทั่วไปจะกำหนดไว้ที่เมื่อค่า x_r ค่าใหม่ที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าเดิมเป็น

เงื่อนไขหยุดการคำนวณ เรียกว่า การกำหนดความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

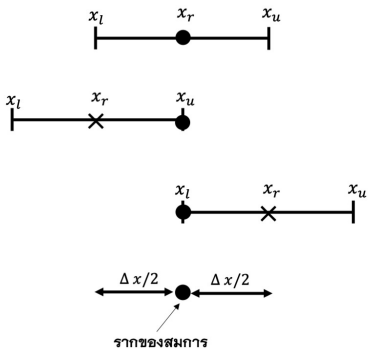
$$\epsilon_a = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| 100\% \tag{2.9}$$

ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในแต่ละรอบการคำนวณสามารถนำมาพล็อตเป็นกราฟได้ดังรูปที่ 2.4 จะเห็นได้ว่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในแต่ละรอบการคำนวณของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะมีค่าที่สูงกว่าความคลาดเคลื่อนจริงเสมอ



รูปที่ 2.4: เปรียบเทียบระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าความคลาดเคลื่อนจริงของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

สำหรับระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงค่าประมาณของรากสมการคือ $x_r = (x_l + x_u)/2$ ซึ่งค่ารากจริงจะต้องอยู่ในช่วง $(x_u - x_l)/2 = \Delta x/2$ ดังนั้นค่าคำตอบที่ถูกต้องจึงจะมีค่าอยู่ในช่วง $\pm\Delta x/2$ ซึ่งจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนจริงมีค่าต่ำกว่าค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เสมอ ดังรูป 2.5



รูปที่ 2.5: ตำแหน่งของ x_r ในระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะอยู่ห่างค่ารากจริง (จุดสีดำทึบ) ไม่เกิน $\Delta x/2$

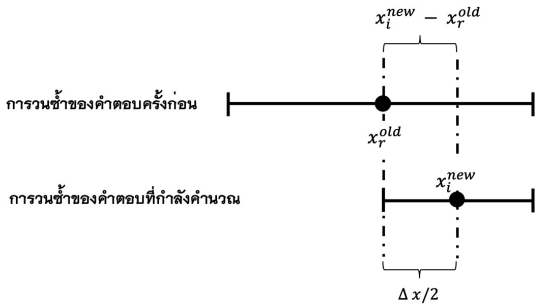
จากรูป 2.6 จะเห็นได้ว่าผลต่างระหว่างค่าประมาณรากค่าใหม่ และค่าประมาณรากค่าเดิมสามารถแสดงได้

ดังสมการ 2.10

$$x_r^{new} - x_r^{old} = \frac{(x_u - x_l)}{2} \tag{2.10}$$

ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของแต่ละรอบการคำนวณจึงสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_u - x_l}{x_u + x_l} \right| 100\% \tag{2.11}$$



รูปที่ 2.6: ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดในแต่ละรอบการคำนวณ $\Delta x/2$ จะมีค่าเท่ากับผลต่างระหว่าง x_r^{new} และ x_r^{old}

ถ้า $E_{a,d}$ คือค่าความคลาดเคลื่อนที่ต้องการของคำตอบสุดท้าย และ Δx^0 คือค่า $x_u - x_l$ ที่เป็นค่าเริ่มต้นคำนวณ เราจะสามารถคำนวณจำนวนรอบในการคำนวณเพื่อให้ได้ความคลาดเคลื่อนของค่าคำตอบอยู่ในช่วงที่ต้องการได้ดังนี้

$$n = \frac{\log(\Delta x^0 / E_{a,d})}{\log 2} = \log_2 \left(\frac{\Delta x^0}{E_{a,d}} \right) \tag{2.12}$$

Pseudocode 1 Bisection method

```
iter = 0
x_l ← "lower bound initial guess"
x_u ← "upper bound initial guess"
ε_a > ε_s
ε_s ← "stopping criteria"
imax ← "maximum iteration"
while ε_a > ε_s or iter ≤ imax do
    x_r^old = x_r
    x_r = (x_l + x_u)/2
    iter = iter + 1
    root = f(x_l) * f(x_r)
    ε_a = |((x_r - x_r^old)/x_r| * 100
    if root < 0 then
        x_u = x_r
    else if root > 0 then
        x_l = x_r
    elseε_a = 0
    end if
end while
```

ตัวอย่าง 2.2. *จงใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงในการหารากของสมการของโจทย์ตัวอย่างที่ 2.1*

$$f(c) = \frac{9.81 \times 68.1}{c}(1 - e^{-(c/68.1)10}) - 40$$

วิธีทำ *จากวิธีพล็อตกราฟ จะเห็นได้ว่ารากของสมการตกอยู่ในช่วงระหว่าง* $x_l = 12$ *และ* $x_u = 16$ *ดังนั้นหากเลือกใช้ค่าทั้งสองเป็นค่าเริ่มต้นจะได้ค่ากึ่งกลาง* x_r *มีค่าเท่ากับ*

$$x_r = \frac{(12+16)}{2} = 14$$

ค่าผลคูณของฟังก์ชันที่ $x_l = 12$ *และ* $x_r = 14$ *จะมีค่าเท่ากับ*

$$f(12)f(14) = 6.067(1.569) = 9.517$$

จะเห็นว่ารากของสมการจะอยู่ในช่วงระหว่างค่า $14 < x < 16$ *ดังนั้นคำนวณหาค่ากึ่งกลางค่าใหม่จาก*

$$x_r = \frac{(14+16)}{2} = 15$$

จะได้ค่าผลคูณของฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ

$$f(14)f(15) = 1.569(-0.425) = -0.666$$

ทำการคำนวณวนซ้ำต่อไปเรื่อย ๆ จึงจะได้ผลการคำนวณในแต่ละรอบดังตารางข้างล่างนี้

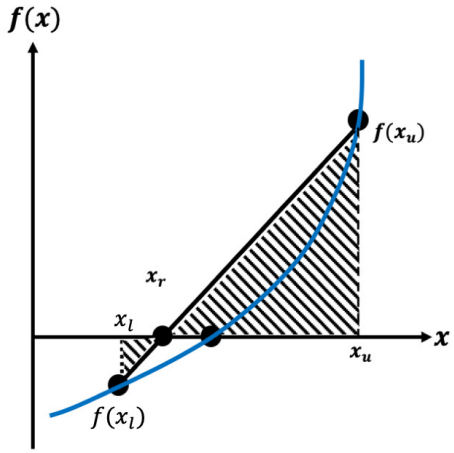
Iteration	x_l	x_u	x_r	$\epsilon_a(\%)$	$\epsilon_t(\%)$
1	*12*	*16*	*14*		*5.279*
2	*14*	*16*	*15*	*6.667*	*1.487*
3	*14*	*15*	*14.5*	*3.448*	*1.896*
4	*14.5*	*15*	*14.75*	*1.695*	*0.204*
5	*14.75*	*15*	*14.875*	*0.840*	*0.641*
6	*14.75*	*14.875*	*14.8125*	*0.422*	*0.219*

เมื่อการคำนวณผ่านไปหกรอบก็จะได้คำตอบของสมการคือ $x = 14.8125$ ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 0.422% และความคลาดเคลื่อนจริงเท่ากับ 0.219%

2.1.3 ระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด (False position method)

วิธีนี้จะใช้การหลักการสร้างเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $f(x_l)$ และ $f(x_r)$ แล้วหาจุดตัดของเส้นตรงนี้บนแกน x เพื่อใช้เป็นค่าประมาณของราก x_r วิธีนี้เรียกอีกชื่อหนึ่งว่าวิธีประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น (Linear interpolation method)

พิจารณาจากรูป 2.7 แล้วใช้กฎของสามเหลี่ยมคล้ายจะสามารถเขียนได้ว่า



รูปที่ 2.7: รูปแสดงแนวความคิดในการหาค่าประมาณของรากสมการด้วยระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u} \tag{2.13}$$

หรือ

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \tag{2.14}$$

ค่า x_r ที่คำนวณได้จะถูกนำไปแทนที่ค่า x_l หรือ x_u ที่มีค่า $f(x_l)$ หรือ $f(x_r)$ ที่มีเครื่องหมายเดียวกับ $f(x_r)$ และจะทำการคำนวณซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่าจะถึงเงื่อนไขที่กำหนดไว้เช่นเดียวกับวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ตัวอย่าง 2.3. *จงใช้วิธีการแก้ตำแหน่งผิด (False position method) ในการคำนวณหารากสมการในตัวอย่างที่ 2.1*

$$f(c) = \frac{9.81 \times 68.1}{c}(1 - e^{-(c/68.1)10}) - 40$$

วิธีทำ

ใช้ค่าเดาเริ่มต้น $x_l = 12$ *และ* $x_u = 16$ *ซึ่งเป็นค่าเดียวกันกับตัวอย่างที่ผ่านมา*

การทำวนซ้ำครั้งที่ 1

$x_l = 12 \qquad f(x_l) = 6.0695$

$x_u = 16 \qquad f(x_u) = -2.2688$

$x_r = 16 - \frac{-2.2688(12-16)}{6.0695-(-2.2688)} = 14.9113$

การทำวนซ้ำครั้งที่ 2

$f(x_l)f(x_r) = -1.5426$

พบว่ารากของสมการจะอยู่ในช่วงระหว่าง x_l *และ* x_u *ดังนั้นแทนค่า* x_r *ลงไปใน* $x_u = 14.9113$

$x_l = 12 \qquad f(x_l) = 6.0695$

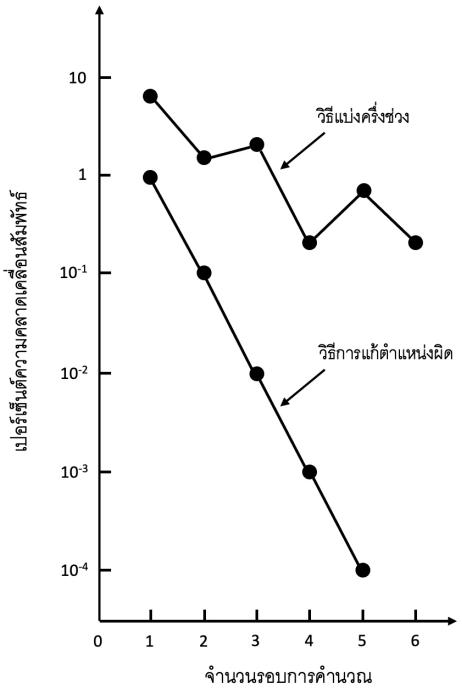
$x_u = 14.9113 \qquad f(x_u) = -0.2543$

$x_r = 14.7942$

จะเห็นได้ว่า ค่า $\epsilon_a = 0.79\%$ *และค่า* $\epsilon_t = 0.09\%$

รูปที่ 2.8 เปรียบเทียบให้เห็นอัตราการลู่เข้าหาคำตอบระหว่างระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง และระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดสามารถลู่เข้าหาคำตอบได้เร็วกว่าระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

อย่างไรก็ตามระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดก็ยังมีข้อจำกัดในการหาคำตอบของสมการที่มีลักษณะดังตัวอย่างที่ 2.4



รูปที่ 2.8: เปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าหาคำตอบระหว่างระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดและระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ตัวอย่าง 2.4. *จงใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงและระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด ในการหาคำตอบของสมการ*

$$f(x) = x^{10} - 1$$

ระหว่างค่า x=0 *และ* 1.3

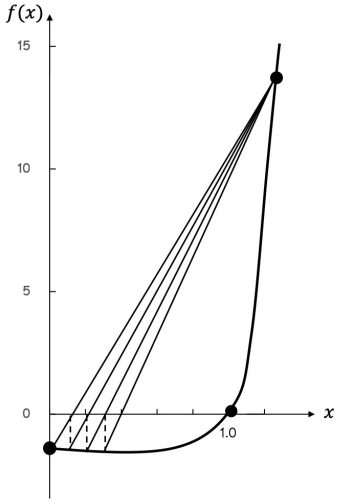
ผลการคำนวณจากระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

Iteration	x_l	x_u	x_r	$\epsilon_a(\%)$	$\epsilon_t(\%)$
1	*0*	*1.3*	*0.65*	*100*	*35*
2	*0.65*	*1.3*	*0.975*	*33.3*	*2.5*
3	*0.975*	*1.3*	*1.1375*	*14.3*	*13.8*
4	*0.975*	*1.1375*	*1.05625*	*7.7*	*5.6*
5	*0.975*	*1.05625*	*1.015625*	*4.0*	*1.6*

ผลการคำนวณจากระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด

Iteration	x_l	x_u	x_r	$\epsilon_a(\%)$	$\epsilon_t(\%)$
1	*0*	*1.3*	*0.09430*		*90.6*
2	*0.09430*	*1.3*	*0.18176*	*48.1*	*81.8*
3	*0.18176*	*1.3*	*0.26287*	*30.9*	*73.7*
4	*0.26287*	*1.3*	*0.33811*	*22.3*	*66.2*
5	*0.33811*	*1.3*	*0.40788*	*17.1*	*59.2*

จากคำตอบในตารางข้างต้นจะเห็นได้ว่าตัวอย่างนี้ ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าหาคำตอบได้ดีกว่าระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด เนื่องจากสมการมีค่าความโค้ง (Curvature) ของสมการสูงทำให้การประมาณค่ารากของสมการลู่เข้าหาคำตอบได้ช้าดังแสดงในรูปที่ 2.9



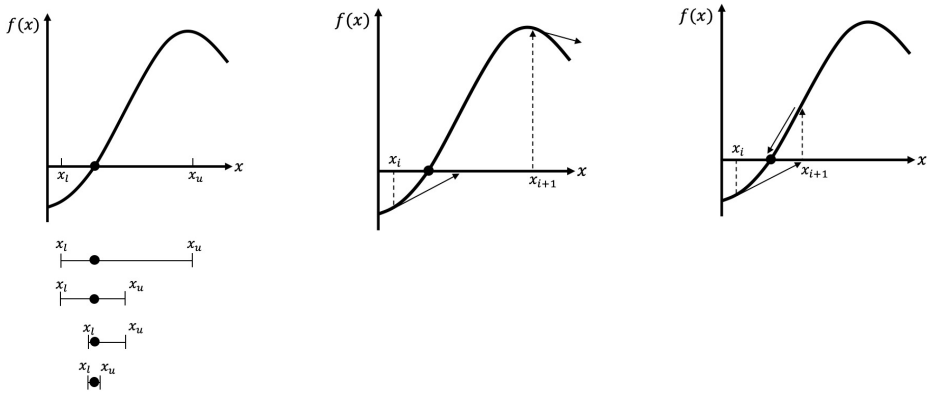
รูปที่ 2.9: การคำนวณค่าประมาณคำตอบของระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดของสมการที่มีความโค้งสูงที่มีผลกระทบต่ออัตราการลู่เข้าหาคำตอบจริงจากตัวอย่างที่ 2.1

Pseudocode 2 False position method

1: $iter = 0$
2: $x_l \leftarrow$ "lower bound initial guess"
3: $x_u \leftarrow$ "upper bound initial guess"
4: $f_l \leftarrow f(x_l)$ "lower bound function value"
5: $f_u \leftarrow f(x_u)$ "upper bound function value"
6: $\epsilon_a > \epsilon_s$
7: $\epsilon_s \leftarrow$ "stopping criteria"
8: $imax \leftarrow$ "maximum iteration"
9: **while** $\epsilon_a > \epsilon_s$ or $iter \leq imax$ **do**
10: $x_r^{old} = x_r$
11: $x_r = x_u - (f_u * (x_l - x_u)/(f_l - f_u))$
12: $iter = iter + 1$
13: $root = f(x_l) * f(x_r)$
14: $\epsilon_a = |((x_r - x_r^{old})/x_r| * 100$
15: **if** $root < 0$ **then**
16: $x_u = x_r$
17: **else if** $root > 0$ **then**
18: $x_l = x_r$
19: **else**$\epsilon_a = 0$
20: **end if**
21: **end while**

2.2 ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)

ระเบียบวิธีแบบเปิดนี้จะเป็นการหารากของสมการโดยอาศัยค่าเดาเริ่มต้นเพียงแค่ค่าเดียว ดังนั้นในบางกรณีเทคนิคนี้ อาจจะทำให้คำตอบที่ได้จากการคำนวณไม่ลู่เข้าหารากของสมการดังแสดงในรูปที่ 2.10 ขึ้นอยู่กับค่าเดาเริ่มต้นและทิศทางการลู่เข้าหาคำตอบ อย่างไรก็ตามหากผลการคำนวณด้วยเทคนิคนี้ลู่เข้าหาคำตอบแล้วจะเร็วกว่าเทคนิคค่าคร่อมรากมาก ซึ่งจะอธิบายถึงเทคนิคระเบียบวิธีแบบเปิดแบบต่าง ๆ โดยละเอียดต่อไป



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.10: รูปแสดงความแตกต่างระหว่างเทคนิค (ก) ระเบียบวิธีแบบกำหนดค่าคร่อมราก และ (ข) และ (ค) ระเบียบวิธีแบบเปิด

2.2.1 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดคงที่ (Fixed-point iteration)

วิธีนี้เป็นการสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการทำนายค่ารากของสมการขึ้นมาด้วยการจัดรูปสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูปของ $x = g(x)$ เช่น

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

สามารถจัดรูปได้เป็น

$$x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

ในขณะที่ฟังก์ชันใน $\sin x = 0$ สามารถทำได้ด้วยการนำเอาค่า x บวกเข้าไปทั้งสองข้างของสมการ

$$x = \sin x + x$$

สมการ $x = g(x)$ จะถูกใช้ในการทำนายค่า x ค่าใหม่จากค่า x ค่าเก่า โดยการเริ่มต้นเดาค่า x_i แล้วคำนวณหาค่าใหม่

x_{i+1} ด้วยระเบียบวิธีการวนซ้ำ (Iterative method)

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{2.15}$$

และใช้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในการประเมินค่าคำตอบดังเช่นวิธีอื่น ๆ ดังได้กล่าวไปแล้ว

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

ตัวอย่าง 2.5. *ให้ใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดคงที่ในการคำนวณหารากของสมการ* $f(x) = e^{-x} - x$

วิธีทำ *จัดรูปสมการใหม่ดังนี้*

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

เริ่มต้นจากค่าเดาเริ่มต้น $x_0 = 0$ *จะได้ค่า*

i	x_i	$\epsilon_a(\%)$	$\epsilon_t(\%)$
0	*0*		*100*
1	*1.00000*	*100.0*	*76.3*
2	*0.367879*	*171.8*	*35.1*
⋮	⋮	⋮	⋮
9	*0.571143*	*1.93*	*0.705*
10	*0.564879*	*1.11*	*0.399*

จะได้ค่าคำตอบที่ใกล้ค่าคำตอบจริงคือ ***0.56714329***

สังเกตุว่า ค่าความคลาดเคลื่อนจริงในแต่ละรอบการคำนวณจะลดลงเป็นอัตราส่วนที่คงที่ ประมาณ 0.5 ถึง 0.6 การลดลงในลักษณะนี้ เรียกว่ามีการลู่เข้าหาคำตอบแบบเชิงเส้น (Linear convergence)

Pseudocode 3 Fixed point iteration method

```
iter = 0
x_r ← "initial guess"
ε_a > ε_s
ε_s ← "stopping criteria"
imax ← "maximum iteration"
while ε_a > ε_s or iter ≤ imax do
    x_r^old = x_0
    x_r = g(x_r^old)
    iter = iter + 1
    ε_a = |((x_r − x_r^old)/x_r| ∗ 100
end while
```

2.2.2 ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton–Raphson method)

ระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสัน เป็นการหารากของสมการที่นิยมใช้มากที่สุด วิธีนี้จะเริ่มต้นจากค่าเดาเริ่มต้น x_i แล้วทำการคำนวณหาเส้นตรงสัมผัสฟังก์ชัน ณ จุด $[x_i, f(x_i)]$ จุดที่เส้นตรงสัมผัสฟังก์ชันนี้ตัดแกน x จะเป็นค่าประมาณของรากค่าใหม่ การหาเส้นสัมผัสฟังก์ชันของระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสันนั้น ทำได้ด้วยการประยุกต์ใช้อนุกรมเทย์เลอร์เฉพาะอันดับที่หนึ่งดังสมการ (2.16)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \tag{2.16}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้สมการนิวตัน–ราฟสัน

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.17}$$

โดยหลักการคำนวณค่ารากของวิธีนิวตัน–ราฟสันสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.11

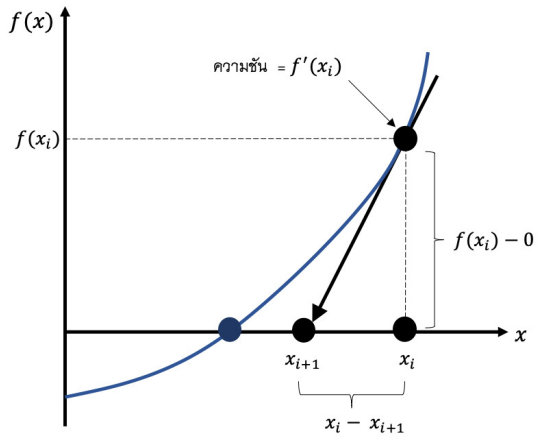
ตัวอย่าง 2.6. *จงใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันในการหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดย ใช้ค่าเดาเริ่มต้น x_0=0*

วิธีทำ *คำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันจากสมการข้างต้นได้*

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

แทนค่า สมการทั้งหมดลงในสมการ (2.17) *จะได้ว่า*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$



รูปที่ 2.11: รูปแสดงหลักการทำนายรากของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

เริ่มต้นจาก $x_0 = 0$ *จะได้ว่า*

i	x_i	$\epsilon_t(\%)$
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	2.20×10^{-5}
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

จากตัวอย่างที่ 2.6 จะเห็นได้ว่าวิธีนี้ลู่เข้าหาคำตอบได้เร็วมาก เนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อนจริง, ϵ_t, ลดลงเร็วกว่าระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดคงที่มาก และค่าความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสันสามารถแสดงได้ดังนี้

$$E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2 \tag{2.18}$$

สมการ (2.18) แสดงให้เห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนในรอบการคำนวณใหม่เป็นสัดส่วนของความคลาดเคลื่อนจากรอบการคำนวณที่ผ่านมายกกำลังสอง พฤติกรรมการลู่เข้าหาคำตอบลักษณะนี้ เรียกว่าการลู่เข้าแบบควอดราติก (Quadratic convergent)

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสันจะมีประสิทธิภาพในการหารากที่สูง แต่ก็จะมีบางสภาวะที่จะลู่เข้าหาคำตอบได้ช้าหรือไม่ลู่หาคำตอบเลย ดังตัวอย่างที่ 2.7

ตัวอย่าง 2.7. *จงหาค่ารากของสมการ* $f(x) = x^{10} - 1$ *โดยใช้ระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสัน โดยใช้ค่าเริ่มต้น* $x = 0.5$

วิธีทำ *จัดรูปสมการสำหรับระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสันจะได้ว่า*

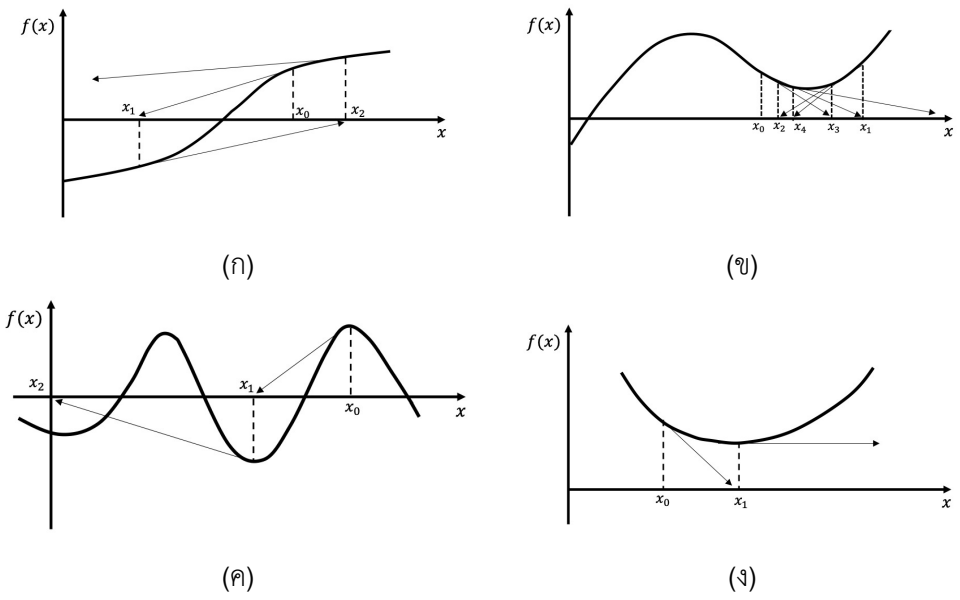
$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{10} - 1}{10x_i^9}$$

ผลการคำนวณเป็นไปดังตารางข้างล่างนี้

Iteration	x
0	*0.5*
1	*51.65*
2	*46.485*
3	*41.8365*
⋮	⋮
∞	*1.00000*

จะเห็นว่าได้การคำนวณค่ารากประมาณที่ได้ค่าแรกห่างจากคำตอบจริง ($x = 1$) มาก และอัตราการลู่เข้าหาคำตอบช้ามาก นอกจากลักษณะของฟังก์ชันที่ทำให้ลู่เข้าหาคำตอบช้าแล้วยังมีปัจจัยอื่น ๆ (ดังแสดงในรูปที่ 2.12) ที่ส่งผลต่อการลู่เข้าหาคำตอบ ซึ่งสามารถจำแนกได้ดังนี้

- มีจุดตัดกลับของเส้นโค้ง (Point of Inflection) $f''(x) = 0$ อยู่ในบริเวณใกล้รากของสมการ
- คำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสันจะวนอยู่ในบริเวณที่เรียกว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (Local maximum) หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (Local minimum)
- ค่าเริ่มต้นที่อยู่ใกล้รากหนึ่งกระโดดไปยังรากอื่น ๆ ที่อยู่ไกลออกไป ในกรณีที่เส้นสัมผัสของฟังก์ชันมีความชันเข้าใกล้ศูนย์, $f'(x) \to 0$
- ความชันของฟังก์ชันเป็นศูนย์ระหว่างการลู่เข้าหาคำตอบของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน



รูปที่ 2.12: กรณีตัวอย่างที่ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน จะไม่ลู่เข้าหาคำตอบ (ก) มีจุดตัดกลับของเส้นโค้ง (Point of Inflection) $f''(x) = 0$, (ข) ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์, (ค) เส้นสัมผัสของฟังก์ชันมีความชันเข้าใกล้ศูนย์, $f'(x) \to 0$, และ (ง) ความชันของฟังก์ชันเป็นศูนย์ระหว่างการลู่เข้าหาคำตอบ

สรุปได้ว่า การลู่เข้าหาคำตอบของระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสันนั้น จะขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันและความใกล้เคียงค่ารากจริงของค่าเดาเริ่มต้น

Pseudocode 4 Newton–Raphson method

$iter = 0$
$x_r \leftarrow$ "initial guess"
$\epsilon_a > \epsilon_s$
$\epsilon_s \leftarrow$ "stopping criteria"
$imax \leftarrow$ "maximum iteration"
while $\epsilon_a > \epsilon_s$ or $iter \leq imax$ **do**
    $x_r^{old} = x_0$
    $x_r = x_r^{old} - \frac{f(x_r^{old})}{f'(x_r^{old})}$
    $iter = iter + 1$
    $\epsilon_a = |((x_r - x_r^{old})/x_r| * 100$
end while

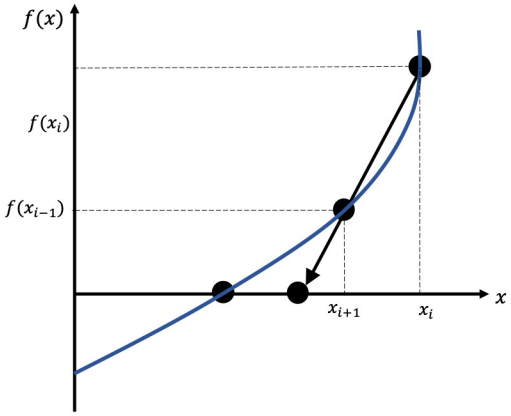
2.2.3 ระเบียบวิธีซีแคนท์ (Secant method)

ปัญหาสำคัญในการใช้ระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสัน คำนวณหารากของสมการคือการที่ต้องคำนวณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยเฉพาะบางฟังก์ชันที่ทำการคำนวณหาค่าอนุพันธ์ได้ยาก ซึ่งในกรณีที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ หรือหาอนุพันธ์ได้ยากนั้นก็สามารถใช้ระเบียบวิธีซีแคนท์แทนระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสันได้

ระเบียบวิธีซีแคนท์จะคำนวณค่าประมาณอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไปข้างหลัง (Backward finite differences) แทนการคำนวณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยตรง ดังแสดงในรูป 2.13

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

แทนการประมาณค่าอนุพันธ์ ลงใน 2.17 จะได้ว่า



รูปที่ 2.13: รูปแสดงหลักการคำนวณหารากสมการของระเบียบวิธีซีแคนท์ ซึ่งใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไปข้างหลังเพื่อประมาณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{2.19}$$

สมการ (2.19) เรียกว่าระเบียบวิธีซีแคนท์ วิธีนี้ต้องการค่าเริ่มต้นทั้งหมด 2 ค่า โดยค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ของค่าเริ่มต้นทั้งสองค่าไม่จำเป็นต้องมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน หรือ ค่าเริ่มต้นไม่จำเป็นต้องคร่อมตำแหน่งรากอย่างระเบียบวิธีแบบกำหนดค่าคร่อมราก

ตัวอย่าง 2.8. *จงใช้ระเบียบวิธีซีแคนท์ในการคำนวณหารากของสมการ* $f(x) = e^{-x} - x$ *โดยใช้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ* $x_{-1} = 0$ *และ* $x_0 = 1.0$

วิธีทำ *การทำวนซ้ำครั้งที่ 1*

$$x_{-1} = 0,\ f(x_{-1}) = 1.00000, \qquad x_0 = 1,\ f(x_0) = -0.63212,$$

$$x_1 = 1 - \frac{-0.63212(0-1)}{1-(-0.63212)} = 0.61270, \qquad \epsilon_t = 8.0\%$$

การทำวนซ้ำครั้งที่ 2

$$x_0 = 1,\ f(x_0) = -0.63212, \qquad x_1 = 0.61270\ , f(x_1) = -0.07081,$$

$$x_2 = 0.61270 - \frac{-0.07081(1-0.61270)}{-0.63212-(-0.07081)} = 0.56384, \qquad \epsilon_t = 0.58\%$$

การทำวนซ้ำครั้งที่ 3

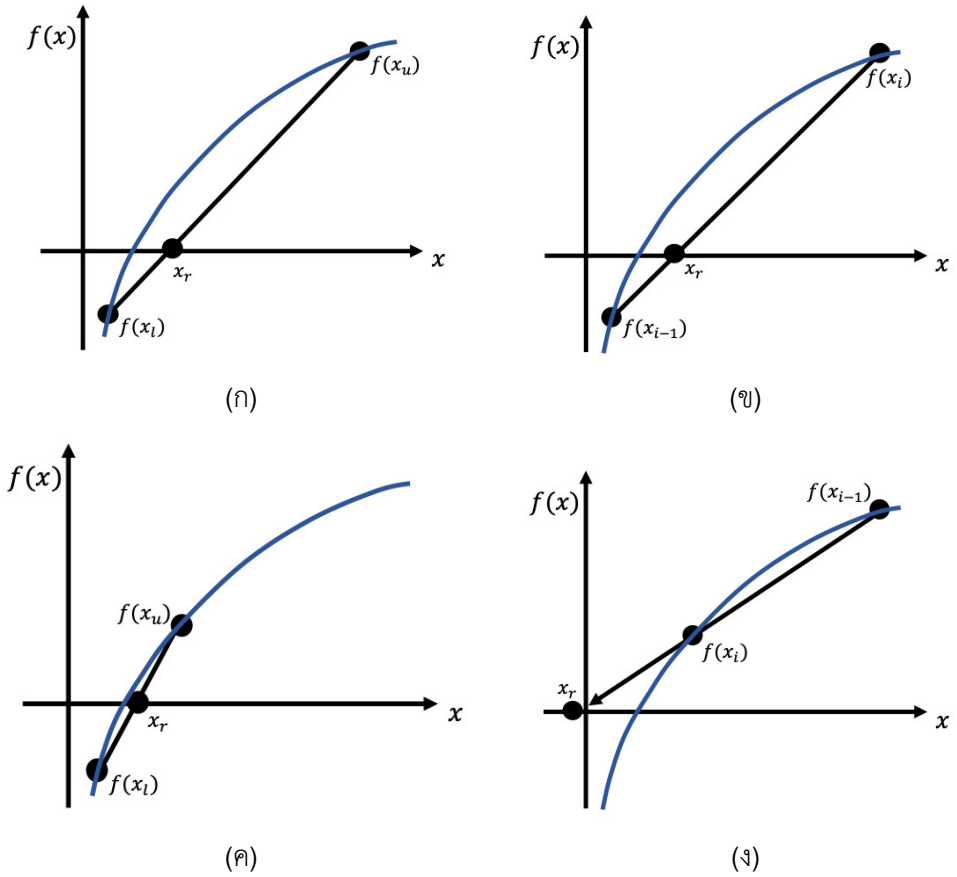
$$x_1 = 0.61270,\ f((x_1) = -0.07081, \qquad x_2 = 0.56384,\ f(x_2) = 0.00518,$$

$$x_3 = 0.56384 - \frac{0.00518(0.61270-0.56384)}{-0.07081-(0.00518)} = 0.56717, \qquad \epsilon_t = 0.0048\%$$

Pseudocode 5 Secant method

```
iter = 0
x_r^old ←"first initial guess"
x_r ← "second initial guess"
ε_a > ε_s
ε_s ← "stopping criteria"
imax ← "maximum iteration"
while ε_a > ε_s or iter ≤ imax do
    x_r^new = x_r − f(x_r)(x_r^old − x_r) / (f(x_r^old) − f(x_r))
    iter = iter + 1
    ε_a = |((x_r − x_r^old)/x_r| ∗ 100
    x_r^old = x_r
    x_r = x_r^new
end while
```

จากรูปที่ 2.14 จะพบว่าระเบียบวิธีซีแคนท์คล้ายกับระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดที่ตรงที่วิธีทั้งสองใช้ค่าเดาเริ่มต้น 2 ตัว เพื่อประมาณค่ารากใหม่เหมือนกัน แต่สองวิธีนี้ต่างกันคือวิธีการนำค่าใหม่ที่คำนวณได้ไปแทนค่าเดาเดิม ในระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดค่ารากใหม่จะถูกนำไปแทนค่าเดิมที่ให้ค่าฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายเดียวกัน จึงทำให้วิธีนี้จะลู่เข้าหารากสมการที่เป็นคำตอบเสมอ ส่วนระเบียบวิธีซีแคนท์จะใช้ค่าใหม่แทนค่าเก่าไปตามลำดับ x_{i+1} แทนค่า x_i และ x_i แทนค่า x_{i-1} ซึ่งจะทำให้บางครั้ง ค่าที่ใช้ทั้งสองค่าจะไม่คร่อมค่ารากจริงและอาจทำให้ผลการคำนวณไม่ลู่เข้าหาคำตอบได้



รูปที่ 2.14: เปรียบเทียบการคำนวณระหว่างระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดและระเบียบวิธีซีแคนท์ (ก) และ (ข) เป็นการคำนวณรอบที่ 1 (ค) และ (ง) เป็นรอบที่ 2 ของทั้งสองวิธีตามลำดับ

ตัวอย่าง 2.9. *จงใช้ระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด และวิธีซีแคนท์ในการประมาณค่ารากของสมการ* $f(x) = \ln(x)$ *โดยใช้ค่าเริ่มต้น* $x_l = x_{i-1} = 0.5$ *และ* $x_u = x_i = 5.05$

วิธีทำ

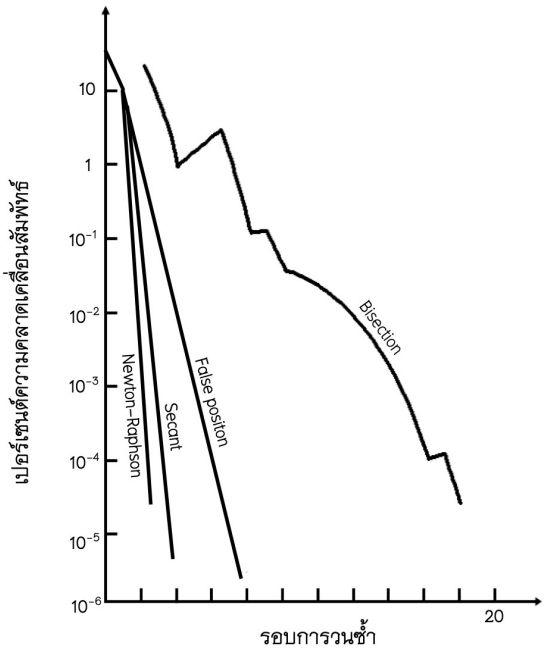
ระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด

Iteration	x_l	x_u	x_r
1	*0.5*	*5.0*	*1.8546*
2	*0.5*	*1.8546*	*1.2163*
3	*0.5*	*1.2163*	*1.0585*

ระเบียบวิธีซีแคนท์

Iteration	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
1	*0.5*	*5.0*	*1.8546*
2	*5.0*	*1.8546*	*-0.10438*
3	*1.8546*	*-0.10438*	*Diverged*

จะเห็นว่าระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิดลู่เข้าหาคำตอบของรากคือ $x = 1$ แต่บางกรณีระเบียบวิธีซีแคนท์ก็ไม่ลู่เข้าหาคำตอบ แต่ถ้าหากกรณีที่ระเบียบวิธีซีแคนท์ลู่เข้าหาคำตอบแล้ว ระเบียบวิธีซีแคนท์จะลู่เข้าหาคำตอบเร็วกว่าระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด ตัวอย่างอัตราการลู่เข้าหาคำตอบของวิธีต่าง ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15: เปรียบเทียบการลู่เข้าหาคำตอบของสมการ $y = e^{-x} - x$ ด้วยวิธีการหารากสมการแบบต่าง ๆ

2.2.4 ระเบียบวิธีโมดิฟายซีแคนท์ (Modified Secant method)

นอกจากการใช้ค่าเดาเริ่มต้นสองค่าในการประมาณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันแล้ว ยังมีอีกวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาใช้ในการประมาณค่าอนุพันธ์ $f'(x)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

โดยที่ δ คือค่าที่ห่างจากค่า x_i น้อยมาก แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2.17) จะได้ว่า

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)} \tag{2.20}$$

ตัวอย่าง 2.10. *จงใช้ระเบียบวิธีโมดิฟายซีแคนท์ในการประมาณค่ารากของสมการ* $e^{-x} - x$ *โดยกำหนดค่า* $\delta = 0.01$ *และค่าเริ่มต้น* $x_0 = 1.0$

วิธีทำ *การทำวนซ้ำครั้งที่ 1*

$$x_0 = 1,\ f(x_0) = 0.63212, \qquad x_0 + \delta x_0 = 1.01,\ f(x_0 + \delta x_0) = -0.64578,$$

$$x_1 = 1 - \frac{0.001(-0.63212)}{-0.64578-(-0.63212)} = 0.537263, \qquad |\epsilon_t| = 5.3\%$$

การทำวนซ้ำครั้งที่ 2

$$x_0 = 0.537263,\ f(x_0) = 0.047083, \qquad x_0 + \delta x_0 = 0.542635,\ f(x_0 + \delta x_0) = 0.038579\ ,$$

$$x_1 = 0.537263 - \frac{0.005373(0.047083)}{0.038579-0.047083} = 0.56701\ , \qquad |\epsilon_t| = 0.0236\%$$

การทำวนซ้ำครั้งที่ 3

$$x_0 = 0.56701,\ f(x_0) = 0.000209, \qquad x_0 + \delta x_0 = 0.572680,\ f(x_0 + \delta x_0) = -0.00867$$

$$x_1 = 0.56701 - \frac{0.00567(0.000209)}{-0.00867-0.000209} = 0.567143, \qquad |\epsilon_t| = 2.365 \times 10^{-5}\%$$

การเลือกค่า δ จะต้องกำหนดขึ้นมาเองหากกำหนดค่า δ น้อยเกินไปจะเกิดความคลาดเคลื่อนจากการ

ปัดเศษ แต่ถ้ากำหนดค่า δ ที่มากจนเกินไปก็จะทำให้ลู่เข้าหาคำตอบช้า หรือไม่ลู่เข้าหาคำตอบเลย อย่างไรก็ตาม วิธีนี้ก็เป็นอีกทางเลือกในการหารากสมการ ในกรณีที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันหาค่าได้ยากและไม่สะดวกในการใช้ค่าเดาเริ่มต้นสองค่า

Pseudocode 6 Modified Secant method

$iter = 0$
$x_r \leftarrow$"initial guess"
$\delta x_r \leftarrow$ "perturbation fraction"
$\epsilon_a > \epsilon_s$
$\epsilon_s \leftarrow$ "stopping criteria"
$imax \leftarrow$ "maximum iteration"
while $\epsilon_a > \epsilon_s$ or $iter \leq imax$ **do**
    $x_r^{old} = x_r$
    $x_r = x_r^{old} - \frac{\delta x_r f(x_r)}{f(x_r+\delta x_r)-f(x_r)}$
    $iter = iter + 1$
    $\epsilon_a = |((x_r - x_r^{old})/x_r| * 100$
end while

2.3 รากของสมการพหุนาม (Root of polynomials)

บางครั้งในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมโดยเฉพาะระบบที่เกี่ยวข้องกับค่าจะต้องคำนวณหารากของสมการพหุนาม

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot + a_n x^n \tag{2.21}$$

โดยที่ n เป็นอันดับ (Order) ของสมการพหุนาม และ a คือค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม สมการพหุนามสามารถมีจำนวนรากได้มากกว่าหนึ่งค่า ซึ่งจะเป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ และรากของสมการพหุนาม จะเป็นไปตามกฎต่อไปนี้

1. สำหรับสมการพหุนามอันดับ n^{th} จะมีจำนวนราก n ตัว จะเป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้
2. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะมีรากที่เป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งค่า
3. ถ้ารากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะอยู่ในรูปของคู่คอนจูเกต $(\lambda + \mu i)$ และ $(\lambda - \mu i)$ โดยที่ $i = \sqrt{-1}$

งานในด้านวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับสมการพหุนามมีอยู่มากมาย โดยเฉพาะด้านการแสดงคุณลักษณะของระบบพลศาสตร์ เช่น สมการอนุพันธ์อันดับสองของการเคลื่อนที่วัตถุต่อเวลา

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t) \tag{2.22}$$

โดยที่ y และ t คือตัวแปรตามและตัวแปรต้นตามลำดับ สมการ (2.22) สามารถเขียนได้อยู่ในรูปของระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้โดยกำหนด

$$z = \frac{dy}{dt} \tag{2.23}$$

แทนค่าสมการ (2.23) ลงในสมการ (2.22) จะได้ว่า

$$\frac{dz}{dt} = \frac{F(t) - a_1 z - a_0 y}{a_2} \tag{2.24}$$

$$\frac{dy}{dt} = z \tag{2.25}$$

หากพิจารณาสมการ

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \tag{2.26}$$

คำตอบทั่วไปของสมการ (2.26) จะอยู่ในรูปของ $y = e^{rt}$ ถ้าแทนค่าลงในสมการ (2.26) จะได้ว่า

$$a_2 r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0$$

หรือ

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{2.27}$$

สมการ (2.27) เป็นสมการพหุนามที่เรียกว่าสมการคุณลักษณะ (Characteristic equation) รากของสมการ r คือตัวแปรที่กำหนดคุณลักษณะของระบบ เรียกว่าค่าไอเกน (Eigenvalues) หากทราบค่า r ก็จะทราบพฤติกรรมของระบบในงานวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องได้ เช่น หากรากของสมการ r เป็นค่าจริง คำตอบของสมการ (2.26) คือ

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{2.28}$$

กรณีนี้เรียกว่า Overdamped หากรากของสมการ r มีค่าเดียว สมการ (2.26) จะมีคำตอบคือ

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \tag{2.29}$$

กรณีนี้เรียกว่า Critically damped หากว่ารากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อน คำตอบของสมการ (2.26) คือ

$$y = c_1 e^{(\lambda + \mu i)t} + c_2 e^{(\lambda - \mu i)t}$$

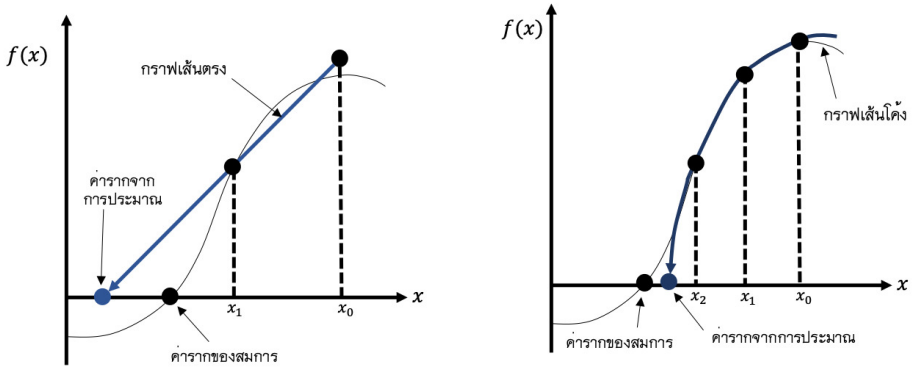
ในการคำนวณหารากของสมการพหุนามนั้น ถ้าหากรากของสมการเป็นจำนวนจริง วิธีการหารากข้างต้น

ทั้งหมด สามารถใช้ในการคำนวณหารากได้ อย่างไรก็ตามการเดาค่าเริ่มต้นในการคำนวณเป็นสิ่งสำคัญ ซึ่งหากเลือกไม่เหมาะสมก็อาจจะทำให้วิธีการเหล่านี้ไม่ลู่เข้าหาคำตอบได้ หากรากของสมการพหุนามเป็นจำนวนเชิงซ้อน ระเบียบวิธีแบบกำหนดค่าคร่อมรากจะไม่สามารถใช้ในการหารากของสมการได้ ระเบียบวิธีเปิดสามารถใช้ได้หากโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณสามารถคำนวณจำนวนเชิงซ้อนได้ อย่างไรก็ตามก็จะต้องมีวิธีการที่จะทำให้วิธีเหล่านี้ลู่เข้าหาคำตอบ

2.3.1 ระเบียบวิธีของมูลเลอร์ (Müller's method)

ระเบียบวิธีของมูลเลอร์ใช้หลักการเดียวกับระเบียบวิธีซีแคนท์ต่างกันที่ระเบียบวิธีของมูลเลอร์ใช้วิธีสร้างเส้นพาราโบลา ผ่านจุดสามจุดแทนการใช้เส้นตรงของระเบียบวิธีซีแคนท์ แล้วคำนวณหาจุดตัดแกน x ของสมการพาราโบลาที่สร้างขึ้น ก็จะได้ค่าประมาณของรากสมการพหุนาม พิจารณาสมการ (2.30)

$$f_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c \tag{2.30}$$



(ก) (ข)

รูปที่ 2.16: เปรียบเทียบการประมาณหาค่ารากระหว่าง (ก) ระเบียบวิธีซีแคนท์ และ (ข) ระเบียบวิธีของมูลเลอร์

หากต้องการให้สมการพาราโบลาผ่านจุดสามจุดคือ $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)]$, และ $[x_2, f(x_2)]$ ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพาราโบลาสามารถคำนวณได้โดยการแทนค่าของจุดทั้งสามลงในสมการ (2.30) จะได้ว่า

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \tag{2.31}$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \tag{2.32}$$

$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \tag{2.33}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการสามารถคำนวณได้จาก

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \tag{2.34}$$

$$b = ah_1 + \delta_1 \tag{2.35}$$

$$c = f(x_2) \tag{2.36}$$

โดยที่

$$h_0 = x_1 - x_0$$

$$h_1 = x_2 - x_1$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

และรากของสมการ

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{2.37}$$

จากการใช้สมการพาราโบลาในการประมาณค่าราก ทำให้สามารถคำนวณได้ทั้งรากจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อน การคำนวณความคลาดเคลื่อนสามารถคำนวณจาก

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| 100\%$$

หลังจากนั้น จะทำการคำนวณซ้ำ จนกว่าค่าความคลาดเคลื่อน จะลดลงจนถึงค่าที่กำหนดไว้

Pseudocode 7 Müller's method

```
1:  iter = 0
2:  x_0 ←"first initial guess"
3:  x_1 ←"second initial guess"
4:  x_2 ←"third initial guess"
5:  x_r = 1.0
6:  ε_a > ε_s
7:  ε_s ← "stopping criteria"
8:  imax ← "maximum iteration"
9:  while ε_a > ε_s * x_r or iter ≤ imax do
10:     iter = iter + 1
11:     h_0 = x_1 − x_0
12:     h_1 = x_2 − x_1
13:     d_0 = (f(x_1) − f(x_0))/h_0
14:     d_1 = (f(x_2) − f(x_1))/h_1
15:     a = (d_1 − d_0)/(h_1 + h_0)
16:     b = a * h_1 + d_1
17:     c = f(x_2)
18:     rad = √(b^2 − 4ac)
19:     if |b + rad| > |b − rad| then
20:         den = b + rad
21:     else
22:         den = b − rad
23:     end if
24:     dx_r = −2 * c/den
25:     x_r = x_2 + dx_r
26:     x_0 = x_1
27:     x_1 = x_2
28:     x_2 = x_r
29:     ε_a = |dx_r|
30: end while
```

2.3.2 ระเบียบวิธีแบร์สโตว์ (Bairstow's method)

วิธีนี้เป็นวิธีวนซ้ำ โดยอาศัยการเดาค่าแฟกเตอร์ขึ้นมาค่าหนึ่ง ซึ่งไม่ใช่รากของสมการ แล้วนำไปหารสมการพหุนามที่ต้องการหารากแล้ว คำนวณเศษจากการหาร หากเศษที่ได้ไม่เท่ากับศูนย์ ค่าแฟกเตอร์ค่าใหม่จะถูกนำไปคำนวณ แล้วหาค่าสมการพหุนามอีกครั้งหนึ่ง ขบวนการนั้นจะทำซ้ำไปจนกว่า เศษการหารเท่ากับศูนย์ ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. เดาค่ารากของสมการ $x = t$
2. หารสมการพหุนามด้วยค่า $(x - t)$
3. คำนวณหาเศษการหาร
4. ถ้าเศษเท่ากับศูนย์ t คือรากของสมการ ถ้าไม่เท่ากับศูนย์ ค่าเดาใหม่จะถูกประมาณ และทำการคำนวณซ้ำขั้นตอนที่ 2 และ 3

พิจารณาสมการพหุนาม

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{2.38}$$

หากหารด้วย แฟกเตอร์ $x - t$ จะได้

$$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots + b_n x^{n-1} \tag{2.39}$$

โดยที่ เศษการหาร

$$R = b_0$$
$$b_n = a_n$$

และ $b_i = a_i + b_{i+1} t$ สำหรับ $i = n - 1$ ถึง 0

ในการคำนวณหารากที่เป็นทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนแบร์สโตว์ใช้สมการพาราโบลา $x^2 - rx - s$ ในการหารสมการโพลิโนเมียลที่ต้องการหาราก จะได้ว่า

$$f_{n-2}(x) = b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-3} + b_n x^{n-2}$$

โดยที่

$$R = b_1(x - r) + b_0$$

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + rb_n$$

$$b_i = a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2}$$

โดยที่ $i = n-2$ ถึง 0 ดังนั้น หากสามารถหาค่า r และ s ได้ก็จะสามารถหาค่ารากของสมการได้จาก

$$c_n = b_n \tag{2.40}$$

$$c_{n-1} = b_{n-1} + rc_n \tag{2.41}$$

$$c_i = b_i + rc_{i+1} + sc_{i+2} \tag{2.42}$$

โดยที่

$$c_2\Delta r + c_3\Delta s = -b_1$$

$$c_1\Delta r + c_2\Delta s = -b_0$$

ค่า Δr และ Δs ที่ได้ จะถูกนำไปปรับปรุงให้ได้ค่าเดาใหม่ จากนั้นจะทำการคำนวณซ้ำจนกว่าค่า

$$\left|\epsilon_{a,r}\right| = \left|\frac{\Delta r}{r}\right| 100\% \tag{2.43}$$

$$\left|\epsilon_{a,s}\right| = \left|\frac{\Delta s}{s}\right| 100\% \tag{2.44}$$

จะมีค่าต่ำกว่าที่กำหนด จากนั้นรากของสมการจะถูกคำนวณโดยสมการ

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \tag{2.45}$$

Pseudocode 8 Bairstow's method

$iter = 0,$
$n \leftarrow$ "Order of polynomial function"
$r, s \leftarrow$"initial quadratic factor $(x^2 - rx - s)$"
$ier = 0$
$\epsilon_{a1} > \epsilon_s$
$\epsilon_{a2} > \epsilon_s$
$\epsilon_s \leftarrow$ "stopping criteria"
$imax \leftarrow$ "maximum iteration"
while $n \geq 3$ or $iter \leq imax$ **do**
  while $\epsilon_{a1} \geq \epsilon_s$ and $\epsilon_{a2} \geq \epsilon_s$ or $iter \leq imax$ **do**
    $iter = iter + 1$
    $b(n) = a(n), \quad b(n-1) = a(n-1) + r * b(n)$
    $c(n) = b(n), \quad c(n-1) = b(n-1) + r * c(n)$
    for $i = n-2, 0, -1$ **do**
      $b(i) = a(i) + r * b(i+1) + s * b(i+2)$
      $c(i) = b(i) + r * c(i+1) + s * c(i+2)$
    end for
    $det = c(2) * c(2) - c(3) * c(1)$
    if $det \neq 0$ **then**
      $dr = (-b(1) * c(2) + b(0) * c(3))/det$
      $ds = (-b(0) * c(2) + b(1) * c(1))/det$
      $r = r + dr, \quad s = s + ds$
      if $r \neq 0$ **then**
        $\epsilon_{a1} = |(dr/r)| * 100$
      end if
      if $s \neq 0$ **then**
        $\epsilon_{a2} = |(ds/s)| * 100$
      end if
    else
      $r = r + 1, \quad s = s + 1, \quad r = r + dr$
      $iter = 0$
    end if
  end while
  QUADROOT$(r, s, r_1, i_1, r_2, i_2)$
  $re(n) = r_1, \quad im(n) = i_1$
  $re(n-1) = r_2, \quad im(n-1) = i_2$
  $n = n - 2$
  for $i = 0, n$ **do**
    $a(i) = b(i+2)$
  end for
end while
if $iter < imax$ **then**
  if $n = 2$ **then**
    $r = -a(1)/a(2), \quad s = -a(0)/a(2)$
    QUADROOT$(r, s, r_1, i_1, r_2, i_2)$
    $re(n) = r_1, \quad im(n) = i_1$
    $re(n-1) = r_2, \quad im(n-1) = i_2$
  else
    $re(n) = -a(0)/a(1), \quad im(n) = 0$
  end if
else
  $ier = 1$
end if
function QUADROOT$(r, s, r_1, i_1, r_2, i_2)$
  $disc = r^2 + 4 * s$
  if $disc > 0$ **then**
    $r_1 = (r + \sqrt{disc})/2$
    $r_2 = (r - \sqrt{disc})/2$
    $_i 1 = 0, \quad i_2 = 0$
  else
    $r_1 = r/2$
    $r_2 = r_1$
    $i_1 = (\sqrt{|disc|})/2,$
    $i_2 = -i_1$
  end if
end function

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงคำนวณหารากของสมการต่อไปนี้

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 0.04} + 0.24\sin^{-1}\left(\frac{0.1}{x}\right) - 10.055752 = 0$$

โดยกำหนดให้ $a = 2$, $b = 10$ และ $\epsilon = 0.001$

2. ถ้ากำหนดให้ค่าความเค้นของสปริงมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_i = \left\{\frac{4C^2 - C - 1}{4C(C-1)}\right\}\frac{Mc}{I}$$

โดยที่ $I = \frac{\pi d^4}{64}, c = \frac{d}{2}, C = \frac{D}{d}$, M คือ โมเมนต์ดัด (Bending moment) , D คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของสปริง และ d คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของลวดสปริง จงคำนวณหาค่าของ C ที่ ทำให้ $\sigma_i = 55 \times 10^3$ psi โดยที่ $M = 5$lb-in และ $d = 0.1$in ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง โดยประมาณค่า C เริ่มต้นที่ 5 และ 12 และ $\epsilon = 0.001$

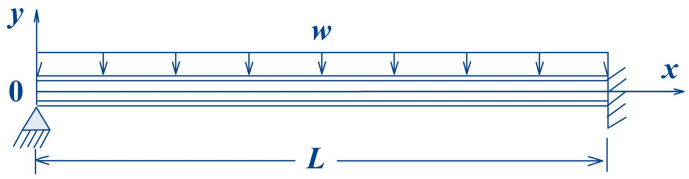
3. จงใช้ระเบียบวิธีการแก้ตำแหน่งผิด คำนวณหาค่า $\frac{y}{\delta}$ จากสมการ

$$\frac{u}{u_\infty} = 3\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}$$

ที่ทำให้ค่า $\frac{u}{u_\infty} = 0.5$

4. คานที่มีจุดยึดปลายดังแสดงในรูป 2.17 มีแรงกระทำแบบสม่ำเสมอกระทำต่อคาน โดยที่คานมีความยาว $L = 400$cm, $E = 52,000$ kN/cm^2, $I = 32,000$ cm^4, $w = 4$ kN/cm สมการสำหรับหาค่าระยะโก่งของคานนี้คือ

$$y = -\frac{w}{48EI}\left(2x^4 - 3Lx^3 + L^3x\right)$$



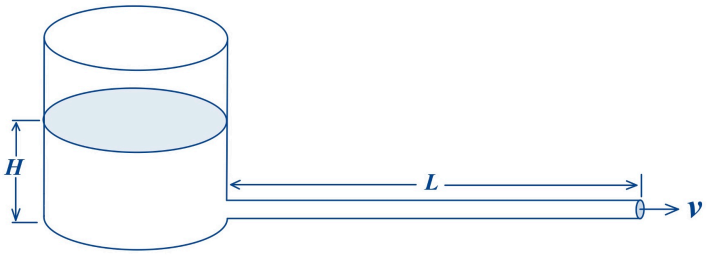
รูปที่ 2.17: คานตรึงที่ถูกกระทำด้วยแรงแบบสม่ำเสมอ

จงคำนวณหาระยะโก่งมากที่สุด (ค่าของ x ณ จุดที่ dy/dx มีค่าเท่ากับ 0) ด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วง โดยใช้ค่าเดาเริ่ม

ต้นที่ $x_l = 0$ และ $x_u = 0.9L$ และให้คำตอบอยู่ในทศนิยมหกตำแหน่ง

5. น้ำถูกระบายออกจากถังน้ำทรงกระบอกผ่านท่อในแนวนอนดังรูป 2.18 เมื่อท่อดังกล่าวถูกเปิดออกและสมมุติให้ระดับของน้ำในถังไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ความเร็วของน้ำในท่อต่อเวลาสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$v = \sqrt{2gH}\tanh\left(\sqrt{\frac{gH}{L}}t\right)$$



รูปที่ 2.18: ถังน้ำที่มีท่อระบายในแนวนอน

โดยที่ $g = 9.81$ m/s^2, H = ระดับน้ำในท่อเริ่มต้น (m), L = ความยาวของท่อ (m), t = ระยะเวลา (s)

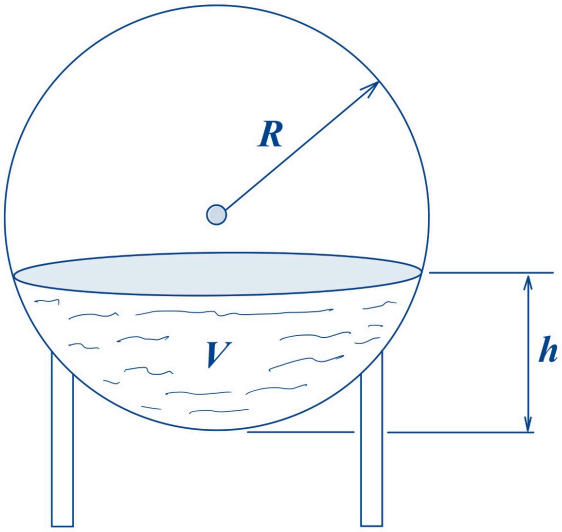
จงหา

- พล็อตฟังก์ชัน $v = f(H)$ เทียบกับ H ณ เวลา t เท่ากับ 1, 2, 3, 4, และ 5 s โดยใช้ค่า H ตั้งแต่ 0 ถึง 4 m และ L มีค่าเท่ากับ 50 m

- ใช้วิธีแก้ตำแหน่งผิด โดยใช้ค่าเดาเริ่มต้นที่ $x_l = 0$ และ $x_u = 4$ คำนวณหาค่าระดับความสูง H ที่จะทำให้ได้ความเร็ว $v = 5$ m/s ที่ตำแหน่ง $t = 2.5$ s ของท่อยาว 4 m ให้คำตอบอยู่ในทศนิยมหกตำแหน่ง

6. ถังบรรจุของเหลวรูปทรงกลม ที่มีของเหลวบรรจุอยู่ภายในบางส่วนดังรูปที่ 2.19 ปริมาตรของของเหลวในถังสามารถคำนวณได้จาก

$$V = \frac{\pi h^2(3R - h)}{3}$$



รูปที่ 2.19: ถังทรงกลมที่มีของเหลวบรรจุอยู่ภายในบางส่วน

โดยที่ R คือ รัศมีภายในถัง, h คือ ความลึกของของเหลวจากพื้นผิวด้านบนของเหลวไปจนถึงก้นถัง จงคำนวณหา

- ถ้าถังมีรัศมี $R = 5$ m จงใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วงเพื่อหาค่าความสูง h ของของเหลวที่มีปริมาตร 300 m^3 บรรจุอยู่ในถัง

  หมายเหตุ 1: สมการด้านบน คือ พหุนามกำลังสามของค่า h ที่มีรากเป็นจำนวนจริง 3 ราก รากหนึ่งมีค่าเหนือถัง นอกเหนือจากนั้นเป็นรากที่มีค่าภายในถัง ดังนั้นค่าคาดคะเนเริ่มต้นควรเริ่มที่เมื่อถังว่างและถังภาชนะเต็ม เพื่อแยกรากที่สำคัญออกได้

- จงใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วงเพื่อคำนวณและแสดงตารางค่าความลึกของของเหลว (h) เทียบกับ ปริมาตร (V) ทุก ๆ 10 m^3 ตั้งแต่ภาชนะเปล่าจนกระทั่งภาชนะเกือบเต็ม

7. จงคำนวณหารากของสมการข้างล่างนี้ด้วยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันโดยกำหนดให้ x_1=0.0 และ $\epsilon = 0.001$

$$f(x) = x^3 - 0.2589x^2 + 0.02262x - 0.001122 = 0$$

8. จงคำนวณหารากของสมการข้างล่างนี้ด้วยระเบียบวิธีซีแคนท์ โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นสองค่าคือ 0.0 และ 0.6 โดยที่ $\epsilon = 0.001$

$$f(x) = 8x^3 + x^2 + 8x - 3 = 0$$

9. จงคำนวณหารากของสมการข้างล่างนี้ด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดคงที่ โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นคือ 3.0 และ $\epsilon = 0.001$

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2 + 9} = 0$$

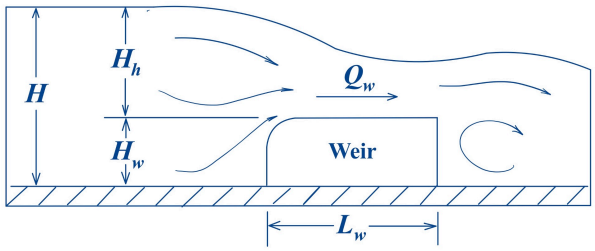
10. ให้ออกแบบถังทรงกลมตามรูปที่ 2.19 เพื่อรองรับการจ่ายน้ำให้กับหมู่บ้านเล็กๆ ปริมาตรของน้ำ V ที่ความสูง h มีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$V = \pi h^2 \frac{3R - h}{3}$$

โดยที่ R คือ รัศมีของถัง หากกำหนดให้ $R = 3$m จะสามารถรองรับน้ำที่ปริมาตร 30 m^3 ได้หรือไม่ และค่าของ h จะมีค่าเท่าไหร่เมื่อน้ำมีปริมาตรดังกล่าว ให้เปรียบเทียบคำตอบที่ได้ระหว่างวิธีกำหนดค่าคร่อมราก และวิธีแบบเปิด ที่ได้จากการวนซ้ำ 3 ครั้ง และให้ใช้ ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ในการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากทั้งสองวิธี กำหนดให้ค่าเดาเริ่มต้นของวิธีกำหนดค่าคร่อมราก ที่ $h = 0$ และ ที่ระดับน้ำเต็มถัง $h = 2R$ และค่าเดาเริ่มต้นของวิธีแบบเปิดให้ใช้ $h = R$

11. รูปที่ 2.20 แสดงภาพด้านข้างของฝายสันกว้าง (Broad–crested weir) ในคลองที่มีน้ำไหลผ่าน ตัวแปรที่แสดงในรูปได้แก่ H_w คือ ความสูงของฝาย (m), H_h คือ ความสูงเหนือฝายไปจนถึงผิวน้ำ (m), H คือ ความลึกของแม่น้ำก่อนจะถึงฝาย และ Q_w คือ อัตราการไหลโดยปริมาตรของน้ำก่อนจะถึงฝาย (m^3/s) อัตราการไหลเชิงปริมาตรของน้ำในคลองนั้นสามารถคำนวณได้จากสมการ (Munson et al., 2013)

$$Q_w = C_w B_w \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} H_h \right)^{3/2}$$



รูปที่ 2.20: ฝายสันกว้างที่ใช้ควบคุมระดับน้ำ และอัตราการไหลของน้ำในคลอง

โดยที่ C_w คือ สัมประสิทธิ์ของฝาย และ B_w คือ ความกว้างของฝาย (m) โดยที่สัมประสิทธ์ของฝายคำนวณได้จาก

$$C_w = 1.125 \sqrt{\frac{1 + H_h/H_w}{2 + H_h/H_w}}$$

ถ้ากำหนดให้ $H_w = 0.8$, $B_w = 8$ m, $Q_w = 1.3$ m^3/s จงหาค่าความลึกของระดับน้ำ H ก่อนถึงฝาย โดยวิธีโมดิฟายซีแคนท์ด้วย $\delta = 10^{-5}$ โดยใช้ค่าเดาเริ่มต้นเท่ากับ $1.5H_w$ และจงอภิปรายว่าหากใช้วิธีทำซ้ำแบบจุดคงที่ คำตอบที่ได้ควรมีลักษณะลู่เข้าหรือไม่

12. ท่อเหล็กหล่อใช้ในการส่งน้ำที่อัตราการไหลเชิงปริมาตร $Q = 0.3$ m^3/s ถ้าสมมุติให้การไหลเป็นแบบสภาวะคงที่ (steady) มีการพัฒนาเต็มที่ (fully developed) และน้ำเป็นของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (incompressible) ความสัมพันธ์ระหว่างการสูญเสียพลังงานเนื่องจากการไหล ความเสียดทาน เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ สามารถแสดงได้ดังสมการ Darcy–Weisbach ดังนี้

$$h_L = f\frac{2Lv^2}{Dg}$$

โดยที่ f คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของแฟนนิ่ง (Fanning friction factor), L คือ ความยาวของท่อ (m), D คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อด้านใน (m), และ v คือ ความเร็วเฉลี่ยของน้ำ (m/s) โดยที่ความเร็วเฉลี่ยและอัตราการไหลเชิงปริมาตรมีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

$$Q = vA$$

A คือ พื้นที่หน้าตัดของท่อภายในท่อ มีค่าเท่ากับ $\pi()D^2/4$(m^2) ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของแฟนนิ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ Colebrook equation

$$\frac{1}{f} = -4\log_{10}\left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{1.26}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

ถ้ากำหนดให้ head loss มีค่าไม่เกิน 0.006 เมตรต่อความยาวท่อหนึ่งเมตร จงคำนวณหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ โดยให้ค่าความขรุขระของท่อเหล็กหล่อมีค่า $\epsilon = 0.26$ mm และ Reynolds number หาได้จากสมการ

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

μ คือ ความหนืดของของไหล ในอุณหภูมิทั่วไปที่ 20 องศาเซลเซียส มีค่าเท่ากับ 1 centipoise หรือเท่ากับ 0.001 Pa.s ในหน่วย SI และความหนาแน่นของน้ำ ณ อุณหภูมิเดียวกันมีค่าเป็น 998 kg/m^3

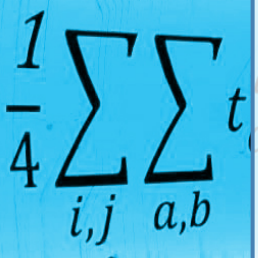
13. จงคำนวณหารากของสมการข้างล่างนี้ด้วยระเบียบวิธีของมูลเลอร์ โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นคือ x_1=-1, x_2=0, และ x_3=1

$$f(x) = e^x - x^2 = 0$$

14. จงคำนวณหารากของสมการข้างล่างนี้ด้วยระเบียบวิธีแบร์สโตว์ โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของ $\bar{\alpha}$=-1 และ $\bar{\beta}$=1

$$x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0$$

3. ระบบสมการเชิงเส้น



3.1	ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ (Gauss elimination method)	47
3.2	ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน (Gauss–Jordan elimination method)	52
3.3	ระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชัน (LU decomposition method)	56
3.4	ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี (Jacobi iteration method)	62
3.5	ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel iteration method)	66
3.6	ระเบียบวิธีผ่อนปรนสืบเนื่อง (Successive relaxation method)	68
3.7	การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีแก้ปัญหาโดยตรง	70
	แบบฝึกหัดท้ายบท	74

ในงานด้านวิศวกรรม ด้านวิทยาศาสตร์หรือด้านอื่น ๆ มักจะมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น โดยเฉพาะการคำนวณด้านพลศาสตร์ของของไหล และการถ่ายเทความร้อน จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงเส้นจำนวนนับพันสมการ โดยที่รูปแบบทั่วไปของระบบสมการเชิงเส้นสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

โดยที่ สัมประสิทธิ์ $a_{ij}(i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n)$ และค่าคงที่ $b_i(i = 1,2,\ldots,n)$ เป็นตัวแปรที่ทราบค่า หรือถูกกำหนดมาแล้ว และ $x_i(i = 1,2,\ldots,n)$ เป็นตัวแปรที่ต้องการคำนวณ และ n เป็นจำนวนของสมการ เราสามารถแสดงสมการ (3.1) ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ว่า

$$[A]\vec{x} = \vec{b} \tag{3.2}$$

โดยที่ $[A]$ คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ $\vec{b}$ คือเวคเตอร์ของค่าคงที่ ขนาด n และ $\vec{x}$ คือเวคเตอร์ของ

ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}, \vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

ระเบียบวิธีแก้ปัญหาของระบบสมการเชิงเส้นดังแสดงในสมการ (3.1) มีหลายวิธี เราสามารถแบ่งวิธีการแก้ปัญหาเหล่านี้ออกได้เป็น 2 ประเภท คือ การแก้ปัญหาโดยตรง (Direct methods) และการประมาณค่าวนซ้ำ (Iterative method)

การแก้ปัญหาโดยตรง จะให้ผลลัพธ์จากการคำนวณเป็นคำตอบจริง (Exact solution) ภายในจำนวนขั้นตอนการคำนวณที่แน่นอน แต่ในบางครั้งความคลาดเคลื่อนจาก Truncation error หรือ Round off error ก็อาจจะทำให้ผลการคำนวณจากวิธีนี้มีความคลาดเคลื่อนหรือผิดพลาดได้ด้วย

การประมาณค่าวนซ้ำ จะเป็นวิธีเริ่มต้นด้วยการประมาณค่าคำตอบขึ้นมาก่อน และนำค่าดังกล่าวไปคำนวณด้วยวิธีการที่เหมาะสมเพื่อให้ได้คำตอบใหม่ที่เข้าใกล้กับคำตอบจริง เมื่อทำการคำนวณวนซ้ำไปเรื่อย ๆ ก็จะทำให้การประมาณค่าคำตอบที่ได้ใกล้เคียงมากขึ้น การคำนวณแบบการแก้ปัญหาโดยตรง และการประมาณค่าวนซ้ำ ที่นิยมใช้แสดงได้ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1: วิธีที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น

วิธีการแก้ปัญหาโดยตรง	**วิธีการประมาณค่าวนซ้ำ**
1. Gauss elimination method	1. Jacobi method
2. Gauss-Jordan method	2. Gauss-Seidel method
3. LU decomposition method	3. Relaxation method

3.1 ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ (Gauss elimination method)

ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์เป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุดในกลุ่มวิธีการแก้ปัญหาโดยตรง วิธีนี้ใช้หลักการลดรูปของ n สมการที่มีตัวไม่รู้ค่า n ตัว ให้อยู่ในรูปของสมการเทียบเท่าที่มีลักษณะดังรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a'_{33}x_3 \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

การลดรูปของสมการ (3.1) ลงมาอยู่ในรูปของสมการ (3.3) เรียกว่าการกำจัดไปข้างหน้า (Forward elimination) หลังจากนั้นคำตอบของระบบสมการก็จะสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีการแทนค่าย้อนกลับ (Back substitution) เนื่องจากสมการสุดท้ายของสมการที่ n^{th} มีตัวไม่รู้ค่าอยู่เพียงตัวเดียว คือ x_n จากนั้นจึงใช้ค่า x_n ที่คำนวณได้ไปคำนวณย้อนหาค่าตัวแปร x_{n-1} ไปจนถึง x_1 ตามลำดับ

ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นตอนในการลดรูปสมการของการกำจัดไปข้างหน้าจะอาศัยหลักการดังต่อไปนี้

1. เราสามารถ คูณ หรือ หาร ทุกสมการด้วยปริมาณสเกล่าร์ได้
2. ทุกสมการสามารถนำไป บวก หรือ ลบ กับสมการอีกสมการหนึ่งได้
3. เราสามารถสลับตำแหน่งของสมการได้

วิธีการลดรูปของสมการสามารถแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1. *จงลดรูปสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์สามเหลี่ยม*

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \tag{E1}$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \tag{E2}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15 \tag{E3}$$

วิธีทำ

กำจัด x_1 *ออกจากสมการ* (E2) *ด้วยการคูณสมการ* (E1) *ด้วย -2 และบวกเข้ากับสมการ* (E2) *ต่อมาให้กำจัด* x_1 *ออกจากสมการ* (E3) *ด้วยการคูณสมการ* (E1) *ด้วย -3/2 แล้วบวกเข้ากับสมการ* (E3) *จะได้*

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \tag{E4}$$

$$5x_2 - 3x_3 = -2 \tag{E5}$$

$$\frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 9 \tag{E6}$$

สมการ (E1) *ที่ใช้ในการกำจัด* x_1 *ออกจากสมการที่เหลือ เรียกว่าสมการไพวอท (Pivot equation) และสัมประสิทธิ์ของ* x_1 *ในสมการ* (E1) *จะเรียกว่าค่าสัมประสิทธิ์ไพวอท (Pivot coefficient) ในขั้นตอนต่อไป ก็จะทำการกำจัด* x_2 *ออกจากสมการ* (E6) *ด้วยการคูณสมการ* (E5) *ด้วย -7/10 และบวกเข้ากับสมการ* (E6) *จะได้*

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \tag{E7}$$

$$5x_2 - 3x_3 = -2 \tag{E8}$$

$$\frac{13}{5}x_3 = \frac{52}{5} \tag{E9}$$

ระบบสมการสุดท้ายนี้จะอยู่ในรูปของเมทริกซ์สามเหลี่ยมที่สามารถคำนวณหาคำตอบด้วยวิธีแทนค่าย้อนกลับ โดยที่คำตอบของระบบสมการนี้คือ

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \tag{E10}$$

ในการใช้ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์กับระบบสมการทั่วไปที่อยู่ในรูป $[A]\vec{x} = \vec{b}$ ให้พิจารณาจาก เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) $[C]$ ที่มีขนาด $n \times (n+1)$

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

โดยที่สมาชิกใน n คอลัมน์แรกของ $[C]$ จะเหมือนกับของ $[A]$ และคอลัมน์สุดท้ายจะมีสมาชิกเหมือนกับ $\vec{b}$

$$\begin{Bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

เราสามารถลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม ข้างต้นให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์สามเหลี่ยมได้ภายใน $n-1$ ขั้นตอนการคำนวณ

$$[C^{(n-1)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1,n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

โดยที่ตัวยกแสดงลำดับขั้นการคำนวณของการกำจัด ดังนั้นในการกำจัด ขั้นที่หนึ่ง จะเขียนได้ว่า

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)}; i = 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n+1 \tag{3.5}$$

สมการ (3.5) แสดงให้เห็นว่า แถวแรกของเมทริกซ์จะถูกใช้เป็นไพวอท โดยที่ a_{11} เป็น pivot element จะเห็นได้ว่า หลังจากทำการกำจัดในขั้นตอนนี้แล้ว สมาชิกในคอลัมน์แรกของแถว $2, 3, \dots, n$ จะกลายเป็นศูนย์ ขั้นตอนต่อไปของ

การกำจัดก็จะเหมือนกันโดยจะใช้แถวที่ $2,3,\ldots,n-1$ เป็นแถวไพวอท (Pivot rows) ตามลำดับ โดยมีสัมประสิทธิ์ $a_{ii}^{(k)}$ เป็น Pivot element ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}; i &= k+1, k+2, \ldots, n, \\ j &= k, k+1, \ldots, n+1; \\ k &= 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

จะสังเกตว่า Pivot element a_{kk}^{k-1} ที่เป็นตัวหารในสมการ (3.6) นั้น จะมีค่าเป็นศูนย์ไม่ได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการสลับแถวของเมทริกซ์เพื่อให้แถวที่มี pivot element มีค่ามากที่สุดเป็นแถวไพวอท วิธีการนี้เรียกว่า วิธีสลับแถว (Partial pivoting) วิธีนี้มีวัตถุประสงค์หลักสองประการ คือ หลีกเลี่ยงความเป็นไปได้ในการเกิดการหารด้วยศูนย์ และเพิ่มความถูกต้องให้กับคำตอบในบางครั้งจะมีการค้นหาค่าไพวอทที่เหมาะสมในแนวคอลัมน์ด้วย วิธีนี้เรียกว่า Complete pivoting ถ้าการตรวจสอบค่าไพวอท ไม่พบค่าที่ไม่เป็นศูนย์ ในขั้นตอนการทำ Pivot element ก็จะสรุปได้ว่าเมทริกซ์ดังกล่าวเป็นเมทริกซ์ซิงกูลาร์ (Singular matrix) และจะเป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ เมื่อทำการลดรูปสมการให้ลงมาอยู่ในรูปของสมการ (3.4) เสร็จแล้ว ก็จะสามารถคำนวณหาคำตอบได้ด้วยวิธีแทนค่าย้อนกลับ ดังนี้

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}} \tag{3.7}$$

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}; i = n-1, n-2, \ldots, 1 \tag{3.8}$$

เราจะสังเกตได้ว่าระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ (Gauss elimination) จะมีขั้นตอนการคูณจำนวน $n^3/3$ ครั้ง ในการหาค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$

ตัวอย่าง 3.2. *ให้คำนวณหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์*

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \tag{E1}$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \tag{E2}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15 \tag{E3}$$

วิธีทำ

Augmented matrix จะมีลักษณะดังนี้

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{bmatrix} \tag{E4}$$

จากการใช้สมการ (3.6) *โดยที่* $k = 1$ *จะได้*

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix} \tag{E5}$$

จากการใช้สมการ (3.6) *โดยที่* $k = 2$ *จะได้*

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{52}{5} \end{bmatrix} \tag{E6}$$

ใช้วิธีการแทนค่าย้อนกลับจากสมการ (E6) *จะได้คำตอบ คือ*

$$x_3 = \frac{52}{13} = 4, x_2 = 2, x_1 = 1$$

หรือ

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Pseudocode 9 Gauss Elimination's method

```
1: function GaussEliminate(a, b, n, x, tol, er)
2:     er = 0
3:     for i = 1, n do
4:         s_i = |a_{i,1}|
5:         for j = 2, n do
6:             if |a_{i,j}| > s_i then
7:                 s_i = |a_{i,j}|
8:             end if
9:         end for
10:    end for
11:    Eliminate(a, s, n, b, tol, er)
12:    if er ≠ −1 then
13:        Substitute(a, n, b, x)
14:    end if
15: end function
16: function Eliminate(a, s, n, b, tol, er)
17:    for k = 1, n − 1 do
18:        Pivot(a, b, s, n, k)
19:        if |a_{k,k}/s_k| < tol then
20:            er = −1
21:            EXIT
22:        end if
23:        for i = k + 1, n do
24:            factor = a_{i,k}/a_{k,k}
25:            for j = k + 1, n do
26:                a_{i,j} = a_{i,j} − factor ∗ a_{k,j}
27:            end for
28:            b_i = b_i − factor ∗ b_k
29:        end for
30:    end for
31:    if |a_{n,n}/s_n| < tol then
32:        er = −1
33:    end if
34: end function
35: function Pivot(a, b, s, n, k)
36:    p = k
37:    big = |a_{k,k}/s_k|
38:    for ii = k + 1, n do
39:        dummy = |a_{ii,k}/s_{ii}|
40:        if dummy > big then
41:            big = dummy
42:            p = ii
43:        end if
44:    end for
45:    if p ≠ k then
46:        for jj = k, n do
47:            dummy = a_{p,jj}
48:            a_{p,jj} = a_{k,jj}
49:            a_{k,jj} = dummy
50:        end for
51:        dummy = b_p
52:        b_p = b_k
53:        b_k = dummy
54:        dummy = s_p
55:        s_p = s_k
56:        s_k = dummy
57:    end if
58: end function
59: function Substitute(a, n, b, x)
60:    x_n = b_n/a_{n,n}
61:    for i = n − 1, 1, −1 do
62:        sum = 0.0
63:        for j = i + 1, n do
64:            sum = sum + a_{i,j} ∗ x_j
65:        end for
66:        x_n = (b_n − sum)/a_{n,n}
67:    end for
68: end function
```

3.2 ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน (Gauss–Jordan elimination method)

วิธีนี้เป็นส่วนขยายของระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ และใช้หลักการพื้นฐานเดียวกัน โดยจะทำการลดรูปอิลิเมนต์ที่อยู่นอกตำแหน่งทแยงมุม (Off–diagonal elements) ให้เป็นศูนย์ ดังนั้นระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์–จอร์แดนจะสามารถคำนวณหาคำตอบได้โดยไม่ต้องใช้ขบวนการแทนค่าย้อนกลับ แนวคิดของระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดนทำการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการโดยการใช้ Augmented matrix , $[C]$ เหมือนกับระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

วิธีการแก้ไขปัญหามีขั้นตอน ดังนี้

1. สร้าง Augmented matrix

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.9}$$

$$a_{ij}^{(0)} = b_i; i = 1, 2, \dots, n; j = n+1 \tag{3.10}$$

2. Normalization ลดรูปสมการในเทอมทแยงมุมแถวไพวอท ของ Augmented matrix ให้เป็น 1 ด้วยการหารด้วยไพวอทอิลิเมนต์

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; j = k, k+1, \dots, n, n+1 \tag{3.11}$$

3. ลดรูปตัวแปรสัมประสิทธิ์ที่อยู่นอกแนวทแยงมุมทั้งด้านบนและด้านล่างให้เป็นศูนย์

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}; j = k, k+1, \dots, n, n+1; \tag{3.12}$$

$$i = 1, 2, \dots, n (i \neq k) \tag{3.13}$$

รายละเอียดสามารถแสดงได้ตามตัวอย่างที่ 3.3

ตัวอย่าง 3.3. *จงคำนวณหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้*

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \tag{E1}$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \tag{E2}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15 \tag{E3}$$

วิธีทำ

จัดทำ ***Augmented matrix***

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{bmatrix} \tag{E4}$$

ขั้นแรกทำการหาร แถวที่ ***1*** *ด้วย* ***2*** *จะได้*

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{bmatrix} \tag{E5}$$

จากนั้น ทำการลดรูปสัมประสิทธิ์ ในคอลัมน์ที่ ***1*** *ของสมการ* (E5) *จะได้*

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix} \tag{E6}$$

ทำการหารแถวที่ ***2*** *ด้วย* ***5*** *จะได้*

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix} \tag{E7}$$

ลดรูปสัมประสิทธิ์ในคอลัมน์ที่ 2 ของสมการ (E7) *จะได้*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{52}{5} \end{bmatrix} \tag{E8}$$

หารแถวที่ 3 ด้วย $\frac{13}{5}$ *จะได้*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{E9}$$

ทำการลดรูปสัมประสิทธิ์ในคอลัมน์ที่ 3 ของสมการ (E9) *จะได้*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{E9}$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (E9) *จะอยู่ในรูปของ*

$$[I]\vec{x} = \vec{b} \tag{E10}$$

ดังนั้นเวคเตอร์ $\vec{b}$ *ก็คือคำตอบของระบบสมการนั่นเอง*

$$\vec{x} = \vec{b} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \tag{E11}$$

วิธีกำจัดของเกาส์–จอร์แดนมีจำนวนการคำนวณมากกว่าวิธีกำจัดของเกาส์อยู่ประมาณ 50% ถึงแม้ทั้งสองวิธีจะให้คำตอบเหมือนกัน แต่ในมุมของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแล้ววิธีกำจัดของเกาส์เป็นที่นิยมใช้มากกว่า

3.3 ระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชัน (LU decomposition method)

วิธีนี้อาศัยหลักการที่ว่าเมทริกซ์ $[A]$ สามารถแสดงได้ในรูปของเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์คูณกัน ดังนี้

$$[A] = [L][U] \tag{3.14}$$

โดยที่ เมทริกซ์ $[L]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่าง และเมทริกซ์ $[U]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

สมการ 3.15 และ 3.16 แสดงให้เห็นว่าในเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ มีตัวแปรที่ไม่รู้ค่าอยู่ $(n^2 + n)$ ในขณะที่เมทริกซ์ $[A]$ มีตัวแปรที่รู้ค่าอยู่ n^2 ตัว ดังนั้น ในการคำนวณเพื่อกำหนดค่าของอิลิเมนต์แต่ละตัวของเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ จึงจะต้องสร้างความสัมพันธ์ขึ้นมาอีก n ความสัมพันธ์ การกำหนดความสัมพันธ์ดังกล่าวเรียกว่าการทำแฟกเตอร์ไรเซชัน (Factorization) ซึ่งสามารถทำได้ 3 วิธี ดังนี้

3.3.1 ระเบียบวิธีของเคราท์ (Crout's method)

ระเบียบวิธีของเคราท์ จะกำหนดให้อีลิเมนต์ในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ $[U]$ ให้มีค่า เป็น 1 ดังนั้นเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ จะมีลักษณะดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

จากสมการ (3.17) ถ้าคูณเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ เข้าด้วยกันก็จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & (l_{11}u_{12}) & (l_{11}u_{13}) \\ l_{21} & (l_{21}u_{12}+l_{22}) & (l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}) \\ l_{31} & (l_{31}u_{12}+l_{32}) & (l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} l_{11} &= a_{11}, l_{21} = a_{21}, l_{31} = a_{31}, \\ l_{11}u_{12} &= a_{12}, \text{ or } u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \\ l_{21}u_{12}+l_{22} &= a_{22}, \text{ or } l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}, \\ l_{31}u_{12}+l_{32} &= a_{32}, \text{ or } l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12}, \\ l_{11}u_{13} = a_{13}, \text{ or } u_{13} &= \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, \\ l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} &= a_{23}, \text{ or } u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}}, \\ l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} &= a_{33} \text{ or } l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{aligned}$$

สำหรับเมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$ จะได้ว่า

$$l_{ij} = \left\{ a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \right\}; i \geq j; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.19}$$

$$u_{ij} = \left\{ \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}} \right\}; i < j; j = 2, 3, \ldots, n \tag{3.20}$$

3.3.2 ระเบียบวิธีของดูลิตเติ้ล (Doolittle's method)

วิธีนี้จะแตกต่างกับระเบียบวิธีของเคราท์ ตรงที่กำหนดให้อีลิเมนต์ในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ $[L]$ มีค่าเป็น 1 แทน ส่วนเมทริกซ์ $[U]$ ก็จะมีค่าเท่ากับเมทริกซ์ $[A']$ ในสมการ (3.3) ของระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ วิธีการคำนวณค่าแต่ละอิลิเมนต์ของเมทริกซ์ $[L]$ และเมทริกซ์ $[U]$ ก็สามารถทำได้ด้วยวิธีเดียวกันกับระเบียบวิธีของเคราท์

3.3.3 ระเบียบวิธีของโคเลสกี้ (Choleski's method)

วิธีนี้จะกำหนดให้อิลิเมนต์ในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ $[L]$, l_{ii} กับเมทริกซ์ $[U]$, u_{ii} มีค่าเท่ากัน (วิธีนี้นิยมใช้กับเมทริกซ์ $[A]$ ที่มีลักษณะสมมาตร)

$$[A] = [U]^T[U] \tag{3.21}$$

โดยที่

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมที่สามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_{11} &= (a_{11})^{\frac{1}{2}}; \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{u_{11}}; j = 2,3,\dots,n; \\ u_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2\right)^{\frac{1}{2}}; i = 2,3,\dots,n; \\ u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}\right); i = 2,3,\dots,n; j = i+1, i+2,\dots,n; \\ u_{ij} &= 0; i > j \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.3.4 การหาคำตอบด้วยระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชัน

ระบบสมการเชิงเส้นสามารถคำนวณหาคำตอบจากระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชันของเมทริกซ์ $[A]$ ด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งจาก 3 วิธีดังกล่าวไปแล้วข้างต้น ดังนี้

$$[A]\vec{x} = [L][U]\vec{x} = \vec{b} \tag{3.24}$$

ในการคำนวณคำตอบให้พิจารณา $\vec{z}$

$$\vec{z} = [U]\vec{x} \tag{3.25}$$

เราสามารถแสดงสมการ (3.24) ได้ว่า

$$[L]\vec{z} = \vec{b} \tag{3.26}$$

หรือ

$$\begin{aligned} l_{11}z_1 &= b_1, \\ l_{21}z_1 + l_{22}z_2 &= b_2, \\ l_{31}z_1 + l_{32}z_2 + l_{33}z_3 &= b_3, \\ &\vdots \\ l_{n1}z_1 + l_{n2}z_2 + l_{n3}z_3 + \ldots + l_{nn}z_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.27}$$

สมการแรกของสมการ (3.27) จะใช้ในการคำนวณหาค่า z_1 จากนั้นสมการที่สองก็จะใช้ในการคำนวณหาค่า z_2 และคำนวณอย่างนี้ต่อไปตามลำดับ เมื่อคำนวณหาค่า z_i ได้แล้ว เราสามารถคำนวณหาค่า x_i ได้จากสมการ (3.25) ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \ldots + u_{1n}x_n &= z_1, \\ x_2 + u_{23}x_3 + \ldots + u_{2n}x_n &= z_2, \\ x_3 + \ldots + u_{3n}x_n &= z_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= z_{n-1}, \\ x_n &= z_n \end{aligned} \tag{3.28}$$

ผลลัพธ์ของสมการ (3.28) สามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีแทนค่าย้อนกลับ จะได้ค่า x_i สมการทั่วไปสำหรับการคำนวณ

หาค่า z_i และ x_i คือ

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{b_1}{l_{11}}, \\ z_i &= \frac{b_i - \sum_{k=l}^{i-1} l_{ik} z_k}{l_{ii}}; i = 2, 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.29}$$

และ

$$\begin{aligned} x_n &= z_n, \\ x_i &= z_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k; i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1 \end{aligned} \tag{3.30}$$

ตัวอย่าง 3.4. *จงคำนวณหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้*

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4;$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6;$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15$$

วิธีทำ

ทำการสร้างเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ ด้วยระเบียบวิธีของเคราท์จะได้

$$[A]\vec{x} \equiv [L][U]\vec{x} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & \frac{7}{2} & \frac{13}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 6 \\ 15 \end{Bmatrix} \tag{E1}$$

คำนวณ $\vec{z}$ จากสมการ (3.29) *จะได้*

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{b_1}{l_{11}} = \frac{4}{2} = 2; \\ z_2 &= \frac{b_2 - l_{21} z_1}{l_{22}} = \frac{6 - (4)(2)}{5} = -\frac{2}{5}; \\ z_3 &= \frac{b_3 - l_{31} z_1 - l_{32} z_2}{l_{33}} = \frac{15 - (3)(2) - \left(\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{13}{5}} = 4 \end{aligned}$$

จากนั้น ทำการคำนวณหาคำตอบจากสมการ (3.30)

$$x_3 = z_3 = 4;$$
$$x_2 = z_2 - u_{23}x_3 = -\frac{2}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)(4) = 2;$$
$$x_1 = z_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)(2) - \left(\frac{1}{2}\right)(4) = 1$$

ระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชัน มีประสิทธิภาพมากกว่าระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ (โดยพิจารณาจากจำนวนขั้นตอนของการคำนวณ) แต่ถ้าไพวอทอิลิเมนต์มีค่าเท่ากับศูนย์ วิธี LU ดีคอมโพซิชันจะไม่สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้ในกรณีนี้ต้องมีการสลับแถวก่อนที่จะใช้วิธีนี้ได้

Pseudocode 10 LU decomposition's method

```
1:  function LUDecomposition(a, n, b, x, tol, er)
2:      er = 0
3:      a(1 : n) = 0
4:      s(1 : n) = 0
5:      Decompose(a, n, tol, o, s, er)
6:      if er ≠ −1 then
7:          Substitute(a, n, , o, b, x)
8:      end if
9:  end function
10: function Decompose(a, n, tol, o, s, er)
11:     for i = 1, n do
12:         o_i = i
13:         s_i = |a_{i,1}|
14:         for j = 2, n do
15:             if |a_{i,j}| > s_i then
16:                 s_i = |a_{i,j}|
17:             end if
18:         end for
19:     end for
20:     for k = 1, n − 1 do
21:         factor = a_{o(i),k}/a_{o(k),k}
22:         a_{o(i),k=factor}
23:         for j = k + 1, n do
24:             a_{o(i),j} = a_{o(i),j} − factor ∗ a_{o(k),j}
25:         end for
26:     end for
27:     if |a_{o(k),k}/s_{o(k)}| < tol then
28:         er = −1
29:     end if
30: end function
31: function Pivot(a, o, s, n, k)
32:     p = k
33:     big = |a_{o(k),k}/s_{o(k)}|
34:     for ii = k + 1, n do
35:         dummy = |a_{o(ii),k}/s_{o(ii)}|
36:         if dummy > big then
37:             big = dummy
38:             p = ii
39:         end if
40:     end for
41:     dummy = o_p
42:     o_p = o_k
43:     o_k = dummy
44: end function
45: function Substitute(a, n, b, x)
46:     x_n = b_n/a_{n,n}
47:     for i = n − 1, 1, −1 do
48:         sum = 0.0
49:         for j = i + 1, n do
50:             sum = sum + a_{i,j} ∗ x_j
51:         end for
52:         x_n = (b_n − sum)/a_{n,n}
53:     end for
54: end function
```

Pseudocode 11 Crout's LU decomposition's method

```
1: function DECOMPOSE(a, n, tol, o, s, er)
2:     for j = 2, n do
3:         a_{1,j} = a_{1,j}/a_{1,1}
4:     end for
5:     for j = 2, n − 1 do
6:         for i = j, n do
7:             sum = 0
8:             for k = 1, j − 1 do
9:                 sum = sum + a_{i,k} * a_{k,j}
10:            end for
11:            a_{i,j} = a_{i,j} − sum
12:        end for
13:        for k = j + 1, n do
14:            sum = 0
15:            for i = 1, j − 1 do
16:                sum = sum + a_{j,i} * a_{i,k}
17:            end for
18:            a_{j,k} = (a_{j,k} − sum)/a_{j,j}
19:        end for
20:    end for
21:    sum = 0
22:    for k = 1, n − 1 do
23:        sum = sum + a_{n,k} * a_{k,n}
24:    end for
25:    a_{n,n} = a_{n,n} − sum
26: end function
```

3.4 ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี (Jacobi iteration method)

ดังที่ได้กล่าวไปข้างต้นแล้วว่าวิธีการประมาณค่าวนซ้ำจะมีหลักการคำนวณที่ต่างไปจากวิธีการแก้ปัญหาโดยตรง สำหรับวิธีการประมาณค่าวนซ้ำนั้น จะต้องมีการเดาค่าคำตอบของตัวแปรทุกตัวขึ้นมาก่อน จากนั้นจึงนำเอาค่าเดานั้นไปทำการคำนวณหาค่าประมาณของคำตอบใหม่ที่ใกล้เคียงกับคำตอบจริงมากกว่าเดิม และทำการคำนวณวนซ้ำไปเรื่อย ๆ ดังจะได้อธิบายในรายละเอียดต่อไป พิจารณาจากสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.31}$$

ระบบสมการข้างต้น สามารถนำมาจัดให้อยู่ในรูปใหม่เพื่อเป็นสมการสำหรับทำการคำนวณหาค่า x_i จากสมการที่ i-th โดยที่ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n]; \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n]; \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}] \end{aligned} \tag{3.32}$$

สมการ (3.32) สามารถแสดงในรูปแบบทั่วไปได้ว่า

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right]; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.33}$$

ระเบียบวิธีวนซ้ำของจาโคบีจะเริ่มจากการประมาณค่าของคำตอบทุกตัวเพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้น $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ โดยทั่วไปหากไม่สามารถประมาณค่าเริ่มต้นได้ ก็สามารถกำหนดให้ค่าเริ่มต้นเป็น 0 ได้ และค่าสมมติที่กำหนดขึ้นจะถูกนำไปแทนในด้านขวามือของสมการ (3.33) เพื่อให้ได้คำตอบค่าใหม่ออกมา

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(1)}\right]; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.34}$$

จากนั้น แทนค่าคำตอบที่ได้จากสมการ (3.34) ลงในเทอมด้านขวามือของสมการ (3.33) อีกครั้ง จะได้ชุดคำตอบค่าใหม่ออกมา จากการทำวนซ้ำสามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]; i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots \tag{3.35}$$

โดยที่ค่า k คือจำนวนรอบของการคำนวณวนซ้ำ การคำนวณวนซ้ำนี้จะทำไปเรื่อย ๆ จนกว่าค่าที่คำนวณใหม่จะใกล้เคียงกับค่าที่กำหนดไว้เป็น ค่าวิกฤตของการลู่เข้า (Convergence criterion) สำหรับการวนซ้ำจะใช้สมการ

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \leq \epsilon; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.36}$$

หรือ

$$\left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}}\right| \leq \epsilon; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.37}$$

โดยที่ ϵ เป็นค่าวิกฤตของการลู่เข้าปกติจะเป็นค่าคงที่ที่มีค่าน้อยมาก ๆ ระเบียบวิธีวนซ้ำของจาโคบีนี้ จะลู่เข้าหาคำตอบที่ถูกต้องได้ ก็ต่อเมื่อ

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \tag{3.38}$$

หากค่าจากการคำนวณจากเมทริกซ์ $[A]$ มีคุณลักษณะตามสมการ (3.38) ค่า $x_i^{(k)}$ ที่ได้จากการวนซ้ำจะลู่เข้าหาคำตอบที่ถูกต้อง โดยไม่ขึ้นกับค่าเริ่มต้น เมทริกซ์ $[A]$ จะมีสภาพตามสมการ (3.38) ได้มักจะต้องเป็นเมทริกซ์ Diagonally dominant นั่นคือ ผลรวมค่าสัมประสิทธิ์ของอีลิเมนต์ ณ ตำแหน่งทแยงมุมของแถวใด ๆ จะต้องมีค่ามากกว่าผลรวมของค่าสมาชิกตัวอื่นในแถวเดียวกัน รวมกัน

ตัวอย่าง 3.5. *จงคำนวณหาคำตอบของระบบเชิงเส้นนี้ด้วยระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี*

$$-5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \tag{E1}$$

$$2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2 \tag{E2}$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 = 32 \tag{E3}$$

วิธีทำ *จัดสมการข้างต้นให้อยู่ในรูป*

$$x_1 = -\frac{1}{5}(1 + x_2 - 2x_3) \tag{E4}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(2 - 2x_1 + 3x_3) \tag{E5}$$

$$x_3 = \frac{1}{7}(32 - 2x_1 - x_2) \tag{E6}$$

กำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับ x_i *ดังนี้* $x_i^{(1)} = 0, i = 1, 2, 3$ *แล้วแทนลงไปในสมการ* (E4) *ถึง* (E6) *จะได้ค่าประมาณค่าใหม่ ดังนี้*

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= -\frac{1}{5}(1 + 0 - 2(0)) = -\frac{1}{5} = -0.2000; \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{6}(2 - 2(0) + 3(0)) = \frac{2}{6} = 0.3333; \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{7}(32 - 2(0) - (0)) = \frac{32}{7} = 4.5714 \end{aligned}$$

จากนั้น แทนค่าที่ได้ลงในสมการ (E4) *ถึง* (E6) *อีกครั้ง จะได้*

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= -\frac{1}{5}(1 + 0.3333 - 2(4.5714)) = 1,5619; \\ x_2^{(3)} &= \frac{1}{6}(2 - 2(-0.2000) + 3(4.5714)) = 2.6857; \\ x_3^{(3)} &= \frac{1}{7}(32 - 2(-0.2000) - 0.3333) = 4.5810 \end{aligned}$$

ทำการคำนวณวนซ้ำไปจนกระทั่ง

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\| \leq 10^{-6}$$

ผลการคำนวณแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

Iteration	*Variables*		
Number	x_1	x_2	x_3
1	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*
2	*-0.2000*	*0.3333*	*4.5714*
3	*1.5619*	*2.6857*	*4.5810*
⋮	⋮	⋮	
10	*1.0018*	*2.0023*	*4.0007*
11	*0.9998*	*1.9997*	*3.9991*

Pseudocode 12 Jacobi iteration method

```
function JACOBI(a, b, n, x, ε_s)
    iter = 0
    imax ← "maximum iteration"
    converge = 0
    while converge = 0 or iter ≤ imax do
        converge = 1
        for i = 1, n do
            sum = 0.0
            for j = 1, n do
                if j ≠ i then
                    sum = sum − a_{i,j} * x_j^k
                end if
            end for
            x_i^{k+1} = (b_i − sum)/a_{i,j}
            if converge = 1 and x_i^{k+1} ≠ 0 then
                ε_a = (|x_i^{k+1} − x_i^k|/x_i^k) * 100
                if ε_a > ε_s then
                    converge = 0
                end if
            end if
        end for
        iter = iter + 1
    end while
end function
```

3.5 ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel iteration method)

จากการคำนวณหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบีข้างต้นนั้น หากสังเกตุแล้วจะพบว่า ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี จะคำนวณค่า $x_i^{(k+1)}$ จากค่าที่คำนวณได้ทั้งหมดในรอบที่ผ่านมา $x_i^{(k)}$ แต่ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล จะใช้ค่าประมาณที่คำนวณได้ใหม่ในรอบปัจจุบัน $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ และค่าที่ได้จากการคำนวณในรอบที่ผ่านมา $x_{i+1}^{(k)}, x_{i+2}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ ไปใช้ในการคำนวณหาค่า $x_i^{(k+1)}$ ส่วนการคำนวณวนซ้ำนี้จะทำไปเรื่อย ๆ จนกว่าค่าที่คำนวณใหม่จะใกล้เคียงกับค่าที่กำหนดไว้เป็น ค่าวิกฤตของการลู่เข้าเช่นเดียวกับระเบียบวิธีของจาโคบี ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์–ไซเดลสามารถแสดงได้สมการ (3.39)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]; i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots \tag{3.39}$$

ตัวอย่าง 3.6. *จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล*

$$-5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \tag{E1}$$

$$2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2, \tag{E2}$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 = 32, \tag{E3}$$

วิธีทำ *จัดรูปสมการ* (E1) *ถึง* (E2) *ใหม่ ดังนี้*

$$x_1 = -\frac{1}{5}[1 + x_2 - 2x_3]; \tag{E4}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}[2 - 2x_1 + 3x_3]; \tag{E5}$$

$$x_3 = \frac{1}{7}[32 - 2x_1 - x_2] \tag{E6}$$

จากค่าเดาเริ่มต้น $x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = 0$ *แทนค่าลงในสมการ* (E4) *จะได้*

$$x_1^{(2)} = -\frac{1}{5}[1 + 0 - 2(0)] = -0.2000$$

จากค่า $x_1^{(2)} = -0.2000$ *ที่คำนวณได้ และ* $x_3^{(1)} = 0$ *แทนค่าลงในสมการ* (E5) *จะได้*

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}[2 - 2(-0.2000) + 3(0)] = 0.4000$$

จากนั้น แทนค่า $x_1^{(2)} = -0.2000$, $x_2^{(2)} = 0.4000$ *ลงในสมการ* (E6) *จะได้*

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{7}[32 - 2(-0.2000) - (0.4000)] = 4.5714$$

จากนั้น ทำการวนซ้ำจนได้ค่าวิกฤตของการลู่เข้า

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\| \leq 10^{-6}$$

และได้ผลการคำนวณดังตารางต่อไปนี้

Iteration	*Variables*		
Number	x_1	x_2	x_3
1	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*
2	*-0.2000*	*0.4000*	*4.5714*
3	*1.5486*	*2.1029*	*3.8286*
⋮	⋮	⋮	
7	*1.0012*	*2.0005*	*3.9996*
8	*0.9997*	*1.9999*	*4.0001*

ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์–ไซเดล ต้องการค่าเริ่มต้นเพียงแค่ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ (ค่า x_1 ไม่จำเป็นต้องกำหนดก็ได้) และทำการวนซ้ำจนกระทั่ง $x_i^{(k+1)}$ ลู่เข้าสู่ค่า ϵ ดังแสดงในสมการ (3.36) และ (3.37) วิธีนี้จะลู่เข้าหาคำตอบโดยไม่ขึ้นอยู่กับการกำหนดค่าเริ่มต้น ก็ต่อเมื่อระบบสมการเป็น Diagonally dominant และหากเราสามารถกำหนดค่าเริ่มต้นได้ใกล้เคียงกับคำตอบ จะทำให้การวนซ้ำลู่เข้าหาคำตอบเร็วมาก

3.6 ระเบียบวิธีผ่อนปรนสืบเนื่อง (Successive relaxation method)

อัตราการลู่เข้าของระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์–ไซเดล เร็วกว่าระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี แต่ก็ยังสามารถทำให้อัตราการลู่เข้าเร็วขึ้นได้อีก ด้วยวิธีผ่อนปรน (Relaxation) จากระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์–ไซเดล และระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี พบว่าค่าเศษ (Residual) ที่มากที่สุดจะเกิดที่ตัวแปร x_i ดังนั้น วิธีผ่อนปรน จึงเป็นวิธีที่ปรับค่า x_i เพื่อให้ได้อัตราการลู่เข้าที่เร็วที่สุด วิธีผ่อนปรนสามารถแสดงได้ดังสมการ (3.40)

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \omega\left\{\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]\right\} + (1-\omega)x_i^{(k)}; \\ i &= 1,2,\ldots,n; k = 1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{3.40}$$

โดยที่ ω คือค่าคงที่ของการผ่อนปรนสืบเนื่อง ที่อยู่ในช่วง $0 < \omega < 2$ ถ้า $\omega = 1$ สมการ (3.40) คือ ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์–ไซเดล นั่นเอง และสมการ (3.40) สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]; \\ i &= 1,2,\ldots,n; k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3.41}$$

หาก $\omega > 2$ วิธีนี้จะไม่ลู่เข้าหาคำตอบ ถ้า $0 < \omega < 1$ วิธีนี้เรียกว่าการผ่อนปรนที่ต่ำกว่า (Successive under relaxation) ถ้า $1 < \omega < 2$ วิธีนี้เรียกว่าการผ่อนปรนที่สูงกว่า (Successive over relaxation) อย่างไรก็ตาม ค่าของ ω ที่เหมาะสมในการทำให้คำตอบลู่เข้าเร็วที่สุดนั้น มีค่าที่ไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่ต้องการหาคำตอบ

ตัวอย่าง 3.7. *จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้โดยวิธีผ่อนปรน และจงระบุค่า คงที่ของการผ่อนปรนสืบเนื่อง, ω ที่เหมาะสมที่สุด*

$$-5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \tag{E1}$$

$$2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2, \tag{E2}$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 = 32 \tag{E3}$$

วิธีทำ

โดยการกำหนดค่าเริ่มต้น $x_i^{(0)} = 0, i = 1, 2, 3$ *และทำการคำนวณจากสมการ* (3.41) *จนกระทั่ง*

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\| \leq 10^{-6}$$

และกำหนดค่า ω *ตั้งแต่* **0.1** *ถึง* **1.4** *เพิ่มขึ้นครั้งละ* **0.1** *ผลของการลู่เข้า แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้*

Value	*No. of Iterations*	*Converged Solution Obtained*		
of ω	*required for convergence*	x_1	x_2	x_3
0.1	*50*	*0.9996*	*1.9832*	*4.0051*
0.2	*31*	*1.0025*	*1.9956*	*4.0014*
0.3	*22*	*1.0022*	*1.9973*	*4.0004*
0.4	*17*	*1.0018*	*1.9979*	*4.0000*
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.4	*51*	*1.0445*	*2.0112*	*3.9644*
1.5	*solution diverged*			

จากตารางผลลัพธ์ข้างต้นจะเห็นได้ว่า การคำนวณจะลู่เข้าหาคำตอบภายในช่วงของ ω *มีค่าระหว่าง* **0.1** *และ* **1.4** *ถ้าค่า* ω *มากกว่า* **1.4** *ผลการคำนวณจะไม่ลู่เข้าหาคำตอบ (Diverge) และค่า* ω *ที่เหมาะสมที่สุด คือ* **0.9**

Pseudocode 13 Gauss-Seidel with relaxation method

```
1: function GaussSeidel(a, b, n, x, ϵ_s, λ)
2:     iter = 0
3:     imax ← "maximum iteration"
4:     converge = 0
5:     for i = 1, n do
6:         dummy = a_{i,i}
7:         for j = 1, n do
8:             a_{i,j} = a_{i,j}/dummy
9:         end for
10:        b_i = b_i/dummy
11:    end for
12:    for i = 1, n do
13:        sum = b_i
14:        for j = 1, n do
15:            if i ≠ j then
16:                sum = sum − a_{i,j} * x_j
17:            end if
18:        end for
19:        x_i = sum
20:    end for
21:    while converge = 0 or iter ≤ imax do
22:        converge = 1
23:        for i = 1, n do
24:            old = x_i
25:            sum = b_i
26:            for j = 1, n do
27:                if j ≠ i then
28:                    sum = sum − a_{i,j} * x_j
29:                end if
30:            end for
31:            x_i = λ * sum + (1.0 − λ) * old
32:            if converge = 1 and x_i ≠ 0 then
33:                ϵ_a = (|x_i − old|/x_i) * 100
34:                if ϵ_a > ϵ_s then
35:                    converge = 0
36:                end if
37:            end if
38:        end for
39:        iter = iter + 1
40:    end while
41: end function
```

3.7 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีแก้ปัญหาโดยตรง

ในการพิจารณาหรือเปรียบเทียบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น มักจะใช้จำนวนการคำนวณทางคณิตศาสตร์เป็นตัวชี้วัด นอกจากนั้นแล้วยังมีวิธีเก็บค่าตัวแปรไว้ในหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ การเพิ่มจำนวนของตัวแปรในรูปการคำนวณ จำนวนทางคณิตศาสตร์สามารถหาค่าได้จากรายละเอียดต่อไปนี้

3.7.1 จำนวนการคำนวณของระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์

ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์จะมีขั้นตอนหลักอยู่สองขั้นตอนคือ การทำการกำจัดไปข้างหน้า เพื่อทำการลดรูปสัมประสิทธิ์ของเมทริกซ์ และการคำนวณหาคำตอบด้วยการแทนค่าย้อนกลับ ในขั้นตอนการทำการกำจัดไปข้างหน้านั้น จะต้องคูณ $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ และ $a_{1,n+1} = b_1$ ด้วย $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ จากนั้นจึงนำไปลบจาก $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2,n+1}$ ตามลำดับ จากขั้นตอนการคำนวณข้างต้นจะเกิดการคูณ n ครั้งและการลบ n ครั้ง และการหาร 1 ครั้ง ดังนั้นในขั้นตอนดังกล่าวจะเกี่ยวข้องกับการคูณและหาร $(n+1)$ ครั้ง และการบวกและลบ n ครั้ง หากทำลักษณะเดียวกันอย่างนี้ซ้ำกับสมการแถวที่ 2nd, 3rd, ... ,nth อีกจำนวน $(n-1)$ รอบ ดังนั้นจะเกิดการคูณและหารทั้งหมด $(n+1)(n-1)$ ครั้ง การบวกและลบ $n(n-1)$ ครั้ง สังเกตว่ายังมีสัมประสิทธิ์ $(n-1)$ ตัว ทางขวาของไพวอทอิลีเมนต์ และอีก $(n-2)$ สมการสำหรับสมการแถวที่ 2 จำนวนการคำนวณในแถวนี้จึงเป็น การคูณและหาร $n(n-2)$ ครั้ง และการบวกและลบ $(n-1)(n-2)$ ครั้ง

เพราะฉะนั้นในการลดรูปเมทริกซ์จึงจะมีการคูณและหารอยู่ทั้งหมด

$$\begin{aligned} N_{m1} =&(n+1)(n-1)+n(n-2)+(n-1)(n-3)+\ldots+(3)(1) \\ =&\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+2)(n-i) \\ =&\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+2n-2i) \\ =&(2n+n^2)\sum_{i=1}^{n-1}1-(2n+n)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

เนื่องจาก

$$\sum_{i=1}^{p}1=p,\ \sum_{i=1}^{p}i=\frac{p(p+1)}{2}\ \text{และ},\ \sum_{i=1}^{p}i^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \tag{3.43}$$

สมการ (3.42) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$N_{m1}=(n^2+2n)(n-1)-(2n+2)\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2-5n}{6} \tag{3.44}$$

ส่วนจำนวนการบวก และการลบจะมีจำนวน

$$\begin{aligned} N_{a1} =&n(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+(2)(1) \\ =&\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)=(n^2+n)\sum_{i=1}^{n-1}1-(2n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2 \\ =&(n^2+n)(n-1)-(2n+1)\frac{(n-1)(n)}{2}+\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \\ =&\frac{(n^3-n)}{3} \end{aligned} \tag{3.45}$$

ในขั้นตอนของการแทนค่าย้อนกลับจะมีการคูณและหารอยู่ทั้งหมด

$$N_{m2}=1+2+3+\ldots+n=\frac{n^2+n}{2} \tag{3.46}$$

การบวกและการลบอยู่ทั้งหมด

$$N_{a2}=0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n^2-n}{2} \tag{3.47}$$

ดังนั้น ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ จะมีคำนวณการคูณ และหาร เท่ากับ

$$N_m=N_{m1}+N_{m2}=\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}+\frac{n^2+n}{2}=\frac{1}{3}(n^3+3n^2-n) \tag{3.48}$$

การบวก และการลบ เท่ากับ

$$N_a = N_{a1} + N_{a2} = \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n) \tag{3.49}$$

3.7.2 จำนวนการคำนวณของวิธีอื่น ๆ

สำหรับระเบียบวิธีของเคราท์ จะต้องใช้การคำนวณ

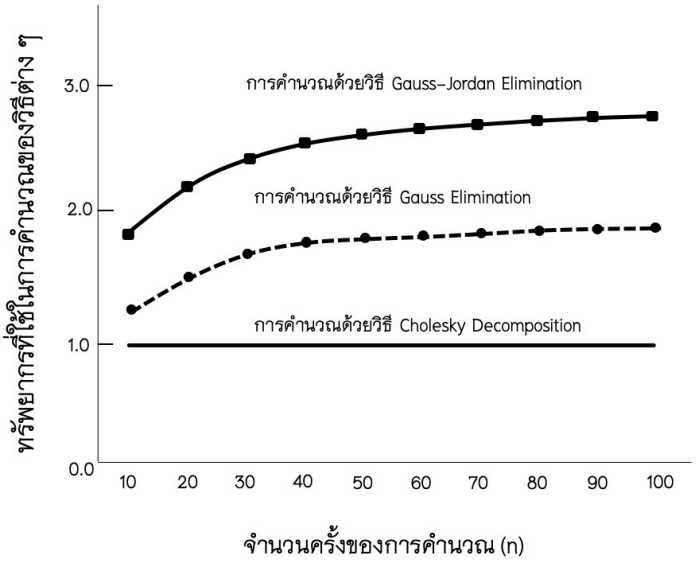
$$N = (n-1)(n+1)! \tag{3.50}$$

ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน จะใช้การคูณและหารจำนวน

$$N_1 = \frac{1}{2}n^3 + n^2 - \frac{1}{2}n \tag{3.51}$$

และการบวกและลบ จำนวน

$$N_2 = \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n \tag{3.52}$$



รูปที่ 3.1: เปรียบเทียบทรัพยากรที่ใช้ในการคำนวณของการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีต่าง ๆ

ระเบียบวิธีของโคเลสกี้ จะใช้การคำนวณ

$$N_1 = n \tag{3.53}$$

$$N_2 = \frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{3}n \tag{3.54}$$

และ

$$N_3 = \frac{1}{6}n^3 + n^2 - \frac{7}{6}n \tag{3.55}$$

รูปที่ 3.1 แสดงจำนวนการคำนวณของแต่ละวิธีที่มีจำนวนสมการ (n) ต่าง ๆ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงใช้ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์ คำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= -51 \\ 4x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 62 \\ 12x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

2. จงใช้ระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชันแบบไม่มีไพวอท (Pivot) และแบบ Partial pivot คำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างล่างนี้ และเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีทั้งสอง

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 &= -20 \end{aligned}$$

3. จงใช้ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล คำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 &= 27 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -61.5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -21.5 \end{aligned}$$

4. จงใช้ระเบียบวิธีผ่อนปรนสืบเนื่อง คำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \\ -8x_1 + x_2 - 1x_3 &= -20 \end{aligned}$$

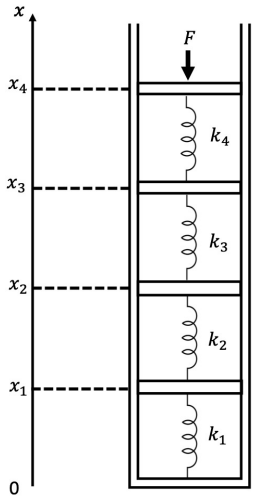
   และหาค่า λ ที่ทำให้อัตราการลู่เข้าหาคำตอบเร็วที่สุด

5. จงเปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าหาคำตอบระหว่างระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล และระเบียบวิธีผ่อนปรนสืบเนื่อง ของ โจทย์ข้อที่ 4

6. ระบบสปริงต่ออนุกรม 4 ตัวถูกกดด้วยมวลขนาด 2000 kg. ดังรูป ในสภาวะสมดุล ระยะกด (x_i)ของสปริงแต่ละ

ตัวแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้ ถ้า $k_1 - k_4$ มีค่าเท่ากับ 150, 50, 75, และ 225 N/m ตามลำดับ จงคำนวณหาระยะกดของสปริงแต่ละตัว

$$\begin{aligned} k_2(x_2 - x_1) &= k_1 x_1 \\ k_3(x_3 - x_2) &= k_2(x_2 - x_1) \\ k_4(x_4 - x_3) &= k_3(x_3 - x_2) \\ F &= k_4(x_4 - x_3) \end{aligned} \tag{3.56}$$

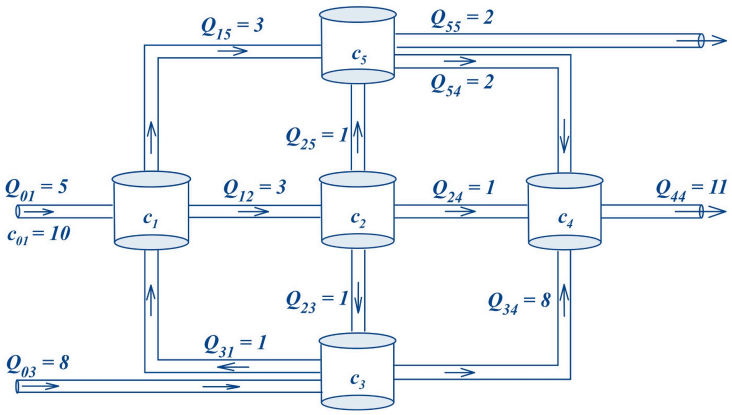


รูปที่ 3.2: รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อที่ 6

7. ภาชนะห้าใบเชื่อมกันด้วยท่อดังรูปที่ 3.3 อัตราการไหลของสารประกอบผ่านท่อแต่ละท่อคำนวณได้จากอัตราการไหลโดยปริมาตร Q (L/min) คูณความเข้มข้นของสารประกอบ c (g/L) ในสภาวะการไหลแบบคงที่ (steady-state conditions) อัตราการไหลโดยมวลเข้าและออกสุทธิแต่ละถังมีค่าเท่ากัน ความเข้มข้นของสารที่ไหลออกจากถังเท่ากับความเข้มข้นของสารในถังนั้น เนื่องจากสารในแต่ละถังถูกผสมเข้ากันเป็นอย่างดีแล้ว ตัวอย่างเช่น ภาชนะที่ 1 สามารถเขียนสมการอนุรักษ์มวลได้เป็น

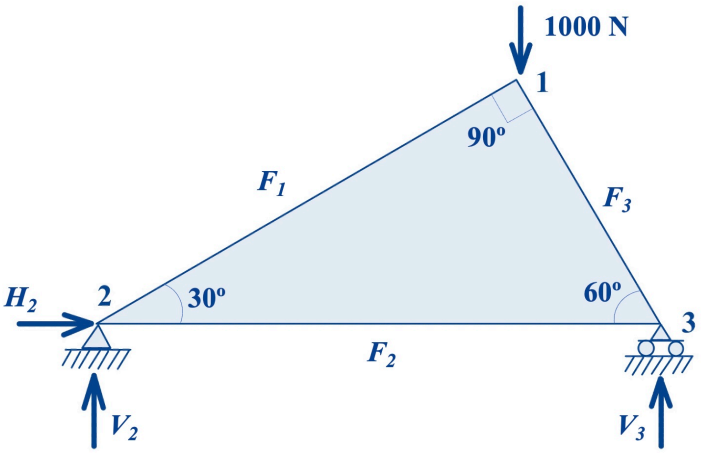
$$Q_{01}c_{01} + Q_{31}c_3 = Q_{15}c_1 + Q_{12}c_1$$

จงเขียนสมการสมดุลมวลสำหรับภาชนะที่เหลือ และแสดงระบบสมการเชิงเส้นในรูปของเมตริกซ์ จากนั้นคำนวณหาความเข้มข้นของสารประกอบในแต่ละถัง



รูปที่ 3.3: เครือข่ายภาชนะห้าใบที่เชื่อมต่อกันด้วยระบบท่อ

8. โครงสร้างประเภทโครงถัก ตามรูปที่ 3.4 สามารถอธิบายการกระจายแรงในระบบได้ด้วยระบบสมการเชิงเส้นที่เชื่อมโยงกัน ซึ่งได้มาจากการทำสมดุลแรงให้ผลรวมของแรงทั้งในแนวนอนและแนวตั้งต้องเป็นศูนย์ที่แต่ละจุด เนื่องจากระบบมีสภาวะหยุดนิ่ง ดังนั้นสำหรับจุดที่ 1 จะสามารถเขียนเป็นสมการสมดุลแรงได้ ดังนี้



รูปที่ 3.4: โครงสร้างแบบโครงถัก 3 ชิ้น

$$\sum F_H = 0 \quad = \quad -F_1 \cos 30° + F_3 \cos 60° + F_{1,h}$$
$$\sum F_V = 0 \quad = \quad -F_1 \sin 30° - F_3 \sin 60° + F_{1,v}$$

(3.57)

สำหรับจุดที่ 2

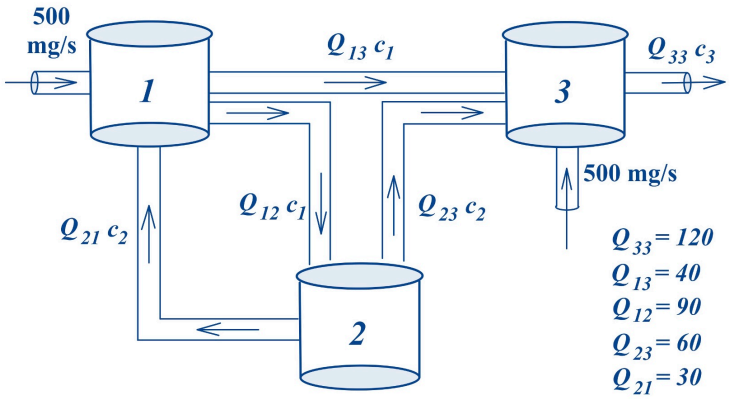
$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &= F_2 - F_1 \cos 30^\circ + F_{2,h} + H_2 \\ \sum F_V = 0 &= F_1 \sin 30^\circ + F_{2,v} + V_2 \end{aligned} \tag{3.58}$$

และจุดที่ 3

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &= -F_3 \cos 60^\circ + F_{3,h} \\ \sum F_V = 0 &= F_3 \cos 60^\circ + F_{3,v} + V_3 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$F_{i,h}$ คือแรงภายนอกแนวนอนที่ปรับใช้กับจุด i โดยที่แรงที่เป็นบวกจะเป็นแรงที่มีทิศไปทางขวา และ $F_{i,}$ คือแรงภายนอกแนวดิ่งที่ที่กระทำกับจุด i โดยที่แรงที่เป็นบวกจะเป็นแรงที่มีทิศขึ้น ดังนั้นในปัญหานี้ แรงที่มีทิศลง 1000 N ณ จุดที่ 1 สอดคล้องกับ $F_{i,} = -1000$ จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นของปัญหานี้ เพื่อคำนวณหาค่าแรงของสมาชิกในโครงถัก

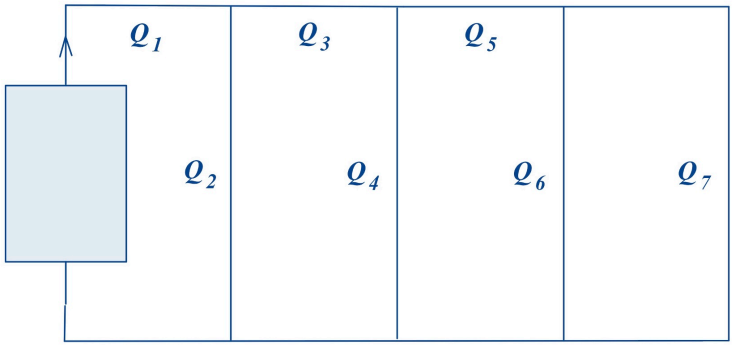
9. รูป 3.5 แสดงภาชนะทรงประบอกจำนวน 3 ใบ เชื่อมต่อกันด้วยท่อหลายท่อ มีการถ่ายเทสารเคมีในท่อเท่ากับอัตราไหลเชิงปริมาตร Q (L/s) คูณด้วยความเข้มข้นของสาร c (mg/L) ในท่อ เมื่อสารเคมีถูกผสมเข้าด้วยกันอย่างดีแล้ว ความเข้มข้นในท่อก็จะเท่ากันกับภายในภาชนะไปด้วย หากระบบดังกล่าวเป็นแบบภาวะคงที่ (steady-state) อัตราการถ่ายเทเข้าภาชนะก็จะเท่ากับอัตราการถ่ายเทออก จงตั้งสมการอนุรักษ์มวลของแต่ละภาชนะแล้วสร้างระบบสมการเชิงเส้นของทั้งสามภาชนะเพื่อคำนวณหาความเข้มข้นของสารในแต่ละภาชนะ



รูปที่ 3.5: ภาชนะผสมสารเคมี 3 ใบที่เชื่อมต่อกันด้วยระบบท่อ

10. เกียร์ปั๊มทำการหมุนเวียนของไหลความหนืดสูง ที่อัตราการไหลเชิงปริมาตรที่ $Q_1 = 100$ mL/min ดังแสดงในรูปที่ 3.6 ท่อทุกเส้นที่ใช้ในระบบมีความยาวและขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากัน จากการสมดุลมวลและสมดุลพลังงานทางกล จะทำให้สามารถคำนวณอัตราการไหลภายในท่อทุกเส้นได้จากระบบสมการเชิงเส้น

$$Q_3 + 2Q_4 - 2Q_2 = 0, \qquad Q_3 - Q_4 - Q_5 = 0$$
$$Q_5 - 2Q_6 - 2Q_4 = 0, \qquad Q_5 - Q_6 - Q_7 = 0$$
$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0, \qquad 3Q_7 - 2Q_6 = 0$$

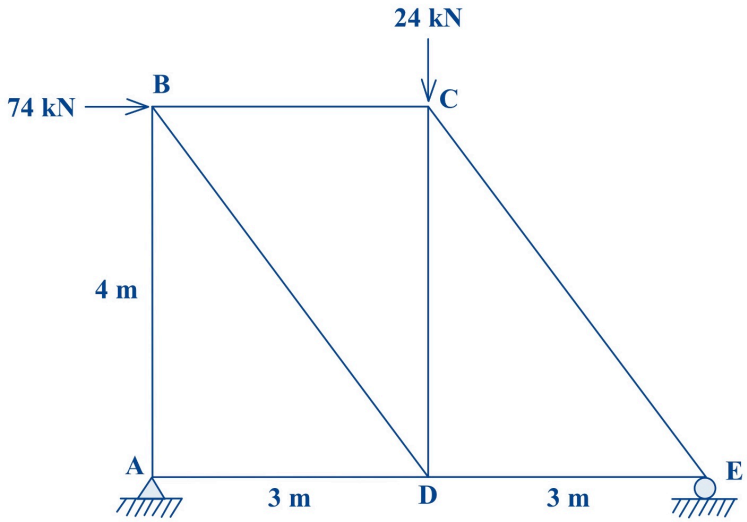


รูปที่ 3.6: ระบบการหมุนเวียนของไหลความหนืดสูงด้วยเกียร์ปั๊ม

จงหาคำตอบจากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น เพื่อหาอัตราการไหลโดยปริมาตร

11. โครงสร้างถักถูกแรงกระทำดังรูปที่ 3.7 ให้ใช้ระบบสมการเชิงเส้นข้างล่างนี้เพื่อหาแรงในอีลีเม้นต์ AB, BC, AD, BD, CD, DE, CE, A_x, A_y และ E_y โดยวิธีเกาส์–ไซเดล

$$A_x + AD = 0, \qquad -24 - CD - \frac{4}{5}CE = 0$$
$$A_y + AB = 0, \qquad -AD + DE - \frac{3}{5}BD = 0$$
$$74 + BC + \frac{3}{5}BD = 0, \qquad CD + \frac{4}{5}BD = 0$$
$$-AB - \frac{4}{5}BD = 0, \qquad -DE - \frac{3}{5}CE = 0$$
$$-BC + \frac{3}{5}CE = 0, \qquad E_y + \frac{4}{5}CE = 0$$



รูปที่ 3.7: โครงสร้างถักที่มีแรงกระทำ

4. การฟิตเส้นโค้ง (Curve fitting)

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j}\sum_{a,b} t$$

4.1	การฟิตด้วยคอลโลเคชันแบบพหุนาม (Collocation polynomial fit)	82
4.2	การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Least squares regression)	85
4.3	การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)	102
	แบบฝึกหัดท้ายบท	118

ในการทำงานวิจัยหรือการทดลอง ข้อมูลที่เก็บได้ส่วนมากจะอยู่ในลักษณะที่เป็นค่าตัวเลขที่ไม่ใช่สมการความสัมพันธ์ต่อเนื่อง และเรามักจะต้องนำข้อมูลที่ได้มาทำการสร้างให้เป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตามที่กำลังศึกษาเพื่อหาแนวโน้มของข้อมูลจากความสัมพันธ์นั้น และใช้สมการที่ได้เป็นตัวแทนพฤติกรรมของข้อมูล ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลนั้นสามารถทำได้ 2 วิธีด้วยกัน คือ

วิธีที่หนึ่ง เป็นการฟิตให้ค่าฟังก์ชันผ่านข้อมูลทุกจุดที่เก็บมา โดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันที่นำมาฟิตข้อมูลนั้น มักจะเป็นฟังก์ชันพหุนาม, ฟังก์ชันตรีโกณมิติ หรือ ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล วิธีการฟิตแบบนี้เรียกว่าคอลโลเคชัน (Collocation) ดังแสดงในรูปที่ 4.1

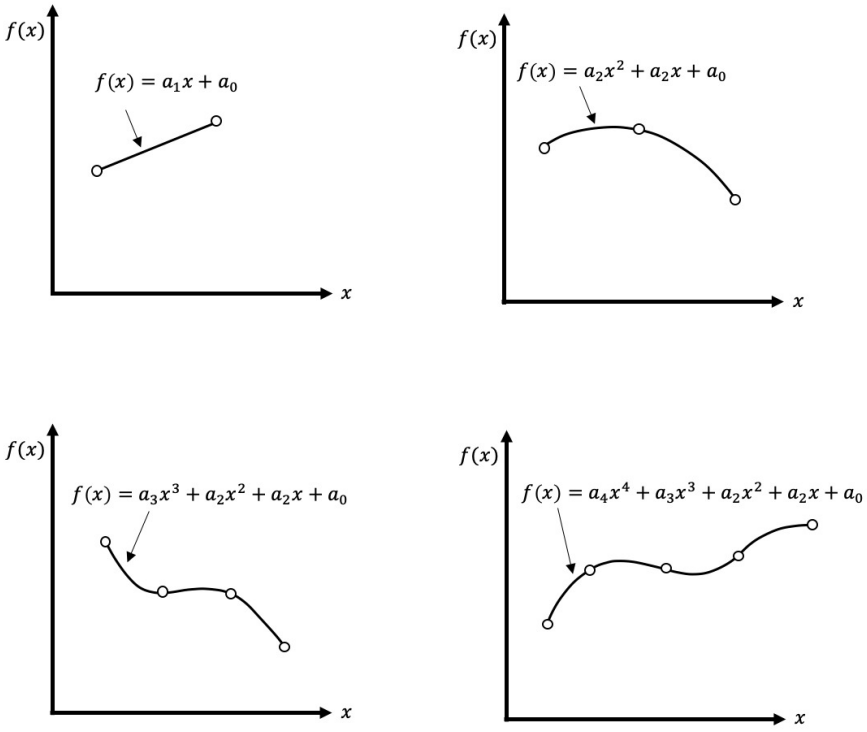
หากฟิตด้วยฟังก์ชันพหุนาม

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \tag{4.1}$$

โดยที่ a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่ไม่รู้ค่า ซึ่งจะหาค่าได้จากการกำหนดให้สมการนี้ผ่านจุดของข้อมูล จำนวน $n + 1$ จุด ในบางกรณีข้อมูลที่ได้มาไม่สามารถฟิตได้ด้วยสมการเพียงสมการเดียว ซึ่งอาจจะต้องทำการฟิตข้อมูลเป็นช่วง ๆ โดยที่แต่ละช่วงอาจจะใช้ฟังก์ชันต่างชนิดกันก็ได้

วิธีที่สอง เป็นการฟิตค่าเพื่อแสดงแนวโน้มของข้อมูล วิธีนี้เหมาะสมกับข้อมูลที่มีจำนวนมาก เกินกว่าที่จะฟิตฟังก์ชันให้ผ่านทุก ๆ จุดได้ หรือกรณีที่ข้อมูลที่เก็บมาได้มีความคลาดเคลื่อนจากการเก็บข้อมูลสูง การฟิตด้วยวิธีนี้จะเป็นการฟิตผ่านกลุ่มข้อมูล ดังแสดงในรูปที่ 4.2 วิธีฟิตแบบนี้จะเรียกว่าการถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Least–squares regression)

การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) เป็นการประมาณค่าของข้อมูลที่ต้องการแต่อยู่ในช่วงระหว่างตัวแปรตัวที่เก็บมาด้วยฟังก์ชันที่กำหนดขึ้น โดยที่จะทำการฟิตข้อมูลที่มีด้วยวิธีคอลโลเคชันก่อน แล้วจึงทำการคำนวณหาค่าฟังก์ชันที่ต้องการในช่วงระหว่างค่าที่เก็บมาจากฟังก์ชันที่ฟิตไว้ การประมาณค่านอกช่วงของการเก็บข้อ



รูปที่ 4.1: การฟิตข้อมูลด้วยสมการพหุนามลำดับขั้นต่าง ๆ

มูบด้วยฟังก์ชันที่ฟิตไว้ เรียกว่าการประมาณค่านอกช่วง (Extrapolation)

4.1 การฟิตด้วยคอลโลเคชันแบบพหุนาม (Collocation polynomial fit)

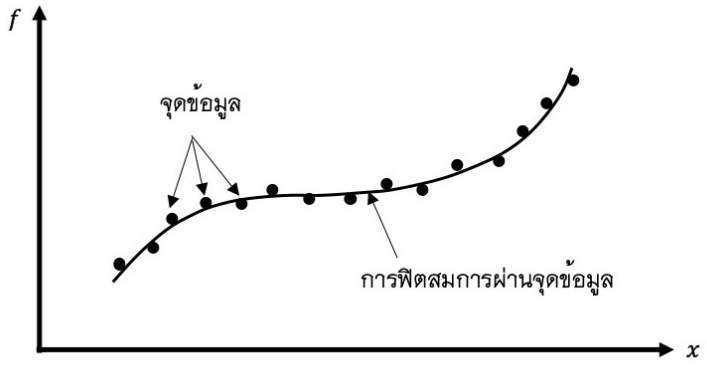
พิจารณาฟังก์ชันพหุนามลำดับขั้น n ที่ใช้การฟิตผ่านข้อมูล จำนวน $n+1$ จุด

$$f(x) = y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \tag{4.2}$$

โดยที่ x เป็นตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม และ a_i เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่ยังไม่รู้ค่า แสดงข้อมูลในรูปแบบของ (x_i, y_i) โดยที่ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ จะได้ว่า

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n ; i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{4.3}$$

สมการ (4.3) จะเป็นรูปแบบของสมการพีชคณิต จำนวน $n+1$ สมการ ซึ่งจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้



รูปที่ 4.2: การฟิตข้อมูลด้วยระเบียบวิธีถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Least–squares regression)

ดังสมการนี้

$$[B]\vec{a} = \vec{y} \tag{4.4}$$

โดยที่ เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์, $[B]$ เรียกว่า เมทริกซ์แวนเดอร์มอนเด (Vandermonde matrix)

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

และ

$$\vec{y} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

สมการ (4.4) สามารถคำนวณแล้วได้คำตอบเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม (a_i) ที่ใช้ในการฟิตข้อมูล อย่างไรก็ตามหากข้อมูลที่เก็บได้มีความซ้ำซ้อนก็จะทำให้สมการ (4.4) ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่าง 4.1. *แรงดันไฟฟ้ากระแสสลับในวงจรไฟฟ้า แสดงเป็นสมการได้ ดังนี้*

$$e(t) = E\sin\frac{2\pi t}{T} \equiv 110\sin 100\pi t \tag{E1}$$

โดยที่ $E = 110V$ และ $T = 0.02s$ จงทำการประมาณค่าฟังก์ชันของแรงดันไฟฟ้าในช่วงเวลาครึ่งคาบ ด้วยฟังก์ชัน Quadratic ที่ผ่านจุด $t = 0$, $t = T/4$ และ $t = T/2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} e_0(t_0 = 0) &= 0 \\ e_1(t_1 = \frac{T}{4} = 0.005) &= 110 \\ e_2(t_2 = \frac{T}{2} = 0.01) &= 0 \end{aligned}$$

การประมาณค่าแรงดันไฟฟ้าด้วยฟังก์ชันควอดราติก (Quadratic)

$$y(x) = a_0 + a_1 + a_2x^2$$

จะได้ว่า

$$[B]\vec{a} = \vec{y} \tag{E2}$$

โดยที่

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.005 & 25\times10^{-6} \\ 1 & 0.01 & 1\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ผลลัพธ์ของการประมาณแรงดันไฟฟ้าด้วยฟังก์ชัน **Quadratic** *จะได้* $a_0 = 0$, $a_1 = 4.4\times10^4$, $a_2 = -4.4\times10^6$ *ดังนั้น*

$$e(t) = 4.4\times10^4 t - 4.4\times10^6 t^2$$

4.2 การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Least squares regression)

ระเบียบวิธีถดถอย (Regression) คือการฟิตเส้นโค้งผ่านข้อมูลให้ได้ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลมากที่สุด การทำการถดถอยที่นิยมใช้โดยทั่วไปมีดังนี้

1. Linear regression
2. Polynomial regression
3. Multiple variable regression
4. Nonlinear regression
5. General linear least squares

4.2.1 การถดถอยเชิงเส้น (Linear regression)

เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการทำการถดถอย ด้วยการฟิตเส้นตรงผ่านชุดข้อมูล $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ โดยที่ x เป็นค่าของตัวแปรต้น และ y เป็นตัวแปรตาม และสมการเส้นตรงสามารถแสดงได้ ดังนี้

$$y = a_0 + a_1 x \tag{4.8}$$

โดยที่ a_0 และ a_1 คือค่าคงที่ของสมการที่จะต้องคำนวณ เนื่องจากสมการเส้นตรงที่นำมาทำการฟิตนั้นเป็นการประมาณค่า ดังนั้นจะเกิดค่าคลาดเคลื่อน (e) ขึ้นระหว่างค่าที่คำนวณได้จากสมการที่ (4.8) และข้อมูลจริง เพราะฉะนั้นค่าจริงของข้อมูลจึงจะมีค่าเท่ากับ

$$y = a_0 + a_1 x + e$$

หรือค่าความคลาดเคลื่อนของของข้อมูลในแต่ละจุดจะมีค่าเท่ากับ

$$e_i = y_i - a_0 - a_1 x_i \tag{4.9}$$

ในการเลือกฟิตเส้นตรงผ่านชุดข้อมูลที่เหมาะสมนั้นต้องการให้ความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่ได้จากความสัมพันธ์ของสมการมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งสามารถทำได้ 3 วิธี คือ

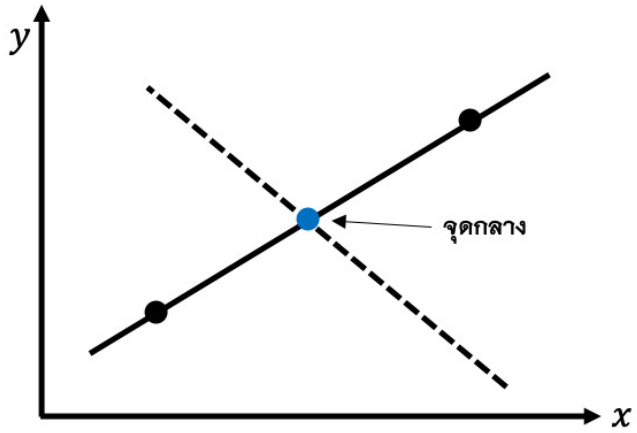
การทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด (Minimize the sum of residual errors) วิธีนี้จะเป็นการฟิตเส้นตรงผ่านกลุ่มของข้อมูลโดยเลือกฟังก์ชันที่ให้ผลรวมของค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างข้อมูลที่คำนวณได้จากฟังก์ชัน และข้อมูลจริงมีค่าน้อยที่สุดซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$S = \sum_{i=1}^{n} e = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

วิธีนี้มีข้อเสียก็คือมีโอกาสที่จะได้ค่าฟังก์ชันที่ไม่สอดคล้องกับลักษณะของข้อมูลแต่ให้ค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนของข้อมูลต่ำที่สุดเช่นกัน ดังรูปที่ 4.3 ที่แสดงให้เห็นคำตอบของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขผลรวมของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดสองฟังก์ชัน แต่ฟังก์ชันของเส้นตรงที่เป็นเส้นประเป็นเส้นของฟังก์ชันที่ไม่เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูล

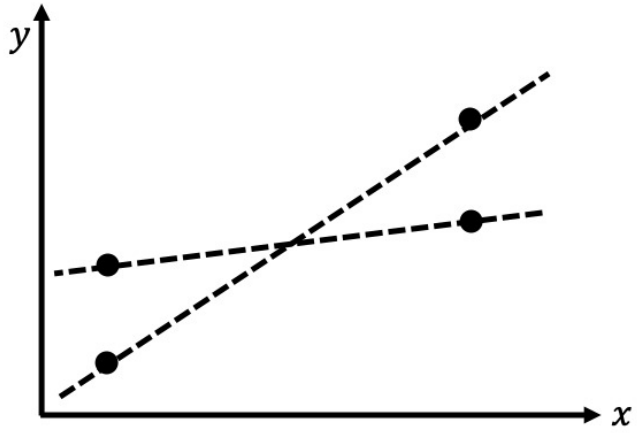
ระเบียบวิธีลดผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อน (Minimize the sum of absolute residual errors) วิธีนี้เป็นการเลือกฟังก์ชันเส้นตรงโดยกำหนดเงื่อนไขให้เส้นตรงนั้นมีผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

$$S = \sum_{i=1}^{n} |e| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - a_0 - a_1 x_i| \tag{4.10}$$



รูปที่ 4.3: การฟิตเส้นตรงผ่านชุดข้อมูลโดยการทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดแล้วให้คำตอบของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งคำตอบ และเป็นฟังก์ชันที่ไม่เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูล

วิธีนี้จะแก้ปัญหาที่เกิดจากวิธีผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดได้ แต่หากข้อมูลมีลักษณะดังรูป 4.4 ก็จะเกิดฟังก์ชันที่ให้ผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนได้สองฟังก์ชัน โดยที่ทั้งสองฟังก์ชันไม่ใช่ฟังก์ชันที่เหมาะสม

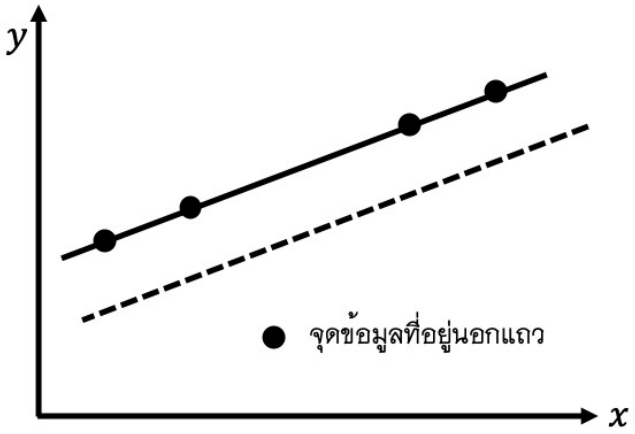


รูปที่ 4.4: การฟิตเส้นตรงผ่านชุดข้อมูลโดยให้ผลรวมค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ที่มีโอกาสได้ฟังก์ชันที่ไม่เหมาสมกับความสัมพันธ์ของข้อมูล

ระเบียบวิธีลดระยะห่างที่มากที่สุด (Minimize the maximum distance or least squares method) วิธีนี้เป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด โดยจะกำหนดเงื่อนไขให้ฟังก์ชันที่เหมาะสมเป็นฟังก์ชันที่มีค่าระยะห่างระหว่างค่าที่

คำนวณได้และค่าข้อมูลจริงที่มากที่สุด มีค่าน้อยที่สุด ฟังก์ชันที่ได้จะมีลักษณะดังรูปที่ 4.5

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \tag{4.11}$$



รูปที่ 4.5: การฟิตเส้นตรงผ่านชุดข้อมูลโดยการทำให้ระยะห่างที่มากที่สุดน้อยที่สุด

ฟังก์ชันที่มีลักษณะดังกล่าวข้างต้นจะสามารถคำนวณได้ โดยจะทำการคำนวณหาค่าคงที่ a_0 และ a_1 ที่ให้ค่า S มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งทำได้ด้วยการหาอนุพันธ์ของ S เมื่อเทียบกับ a_0 และ a_1 แล้วกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) \tag{4.13}$$

จัดสมการ (4.12) และ (4.13) ใหม่จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{4.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \tag{4.15}$$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n} a_0 = n a_0$ ดังนั้น

$$a_0(n) + a_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{4.16}$$

$$a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4.17}$$

โดยใช้กฎของเครเมอร์ (Cramer's rule) เราจะสามารถหาค่าของ a_0 และ a_1 ได้ดังนี้

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{4.18}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{4.19}$$

หรือ

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{4.20}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} \tag{4.21}$$

ความถูกต้องของการถดถอยเชิงเส้น

การคำนวณค่าความถูกต้องของการถดถอยเชิงเส้น จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดสามารถทำได้โดย

1. คำนวณผลรวมของกำลังสองของค่าความแตกต่างของข้อมูลจริง กับค่าเฉลี่ย

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \tag{4.22}$$

โดยที่ $\bar{y}$ เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูล y_i

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{4.23}$$

2. คำนวณค่าผลรวมของความแตกต่างของข้อมูลจริงกับข้อมูลที่ได้จากการคำนวณ, S

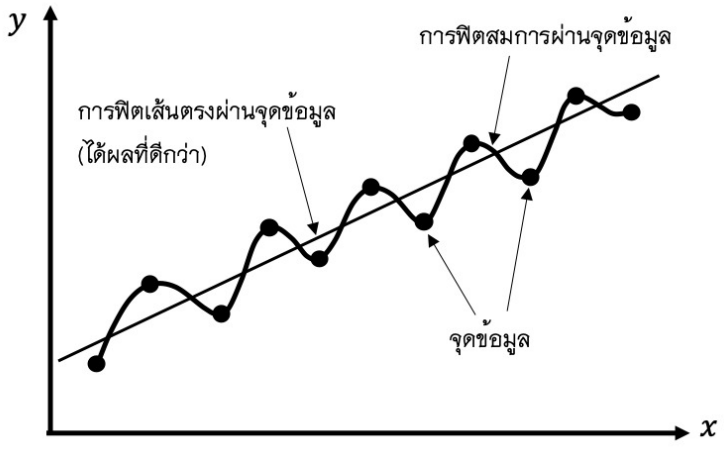
$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \tag{4.24}$$

โดยที่ a_0 และ a_1 ได้จากสมการ (4.18) และ สมการ (4.19) ตามลำดับ

ผลต่างที่เกิดขึ้นระหว่าง S_0 และ S บอกถึงความถูกต้องของระเบียบวิธีถดถอยเชิงเส้น และค่าความแตกต่างระหว่างค่า S_0 และ S นี้ เมื่อนำมาทำการ Normalized จะได้ว่า

$$r^2 = \left(\frac{S_0 - S}{S_0}\right) \tag{4.25}$$

โดยที่ค่า r คือค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation coefficient) หากข้อมูลที่เก็บมา มีลักษณะเป็นเส้นตรงค่า S ที่คำนวณจาก (4.18) จะมีค่าเป็น 0 และค่า r จะมีค่าเท่ากับ 1 แต่หากการทำการถดถอย ด้วยเส้นตรงไม่ได้นำเสนอถึงลักษณะข้อมูล S ที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับค่า S_0 ซึ่งจะมีผลทำให้ค่า r มีค่าเข้าใกล้ 0 ดังนั้น ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของการทำถดถอยเชิงเส้นจะมีค่า r จะมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 อย่างไรก็ตามหลังจากทำการถดถอยแล้ว ควรจะมีการพล็อตกราฟของสมการถดถอยเทียบกับข้อมูลจริงเสมอเพื่อดูผลของการฟิตเส้นโค้งว่าเป็นอย่างไร



รูปที่ 4.6: เปรียบเทียบระหว่างการฟิตด้วยวิธีคอลโลเคชัน และระเบียบวิธีถดถอยเชิงเส้น

ตัวอย่าง 4.2. *ให้ใช้ระเบียบวิธีถดถอยเชิงเส้นในการฟิตข้อมูลต่อไปนี้*

i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.7	2.2	2.8	4.4	4.9

วิธีทำ *จากโจทย์กำหนด ข้างต้น จะได้ว่า*

$$n = 5$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 15$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 15.0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0.7 + 4.4 + 8.4 + 17.6 + 24.5 = 55.6$$

จากสมการ (4.18) *และ* (4.19) *จะได้ว่า*

$$a_0 = \frac{15(55) - 15(55.6)}{5(55) - (15)^2} = -0.18$$

และ

$$a_1 = \frac{5(55.6) - 15(15)}{5(55) - (15)^2} = 1.06$$

ดังนั้น สมการที่ได้จากการถดถอย คือ

$$y(x) = -0.18 + 1.06x$$

คำนวณหาความแม่นยำของการถดถอย

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 3.0;$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 11.54;$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = 0.304;$$

$$r = \left(\frac{S_0 - S}{S_0} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.9867$$

Pseudocode 14 Linear regression

```
1:  function LinearRegression(x, y, n, a_1, a_0, s_{y/x}, r^2)
2:      sumx = 0,    sumxy = 0
3:      sumy = 0,    sumx2 = 0
4:      st = 0,      sr = 0
5:      for i = 1, n do
6:          sumx = sumx + x_i
7:          sumy = sumy + y_i
8:          sumxy = sumxy + x_i * y_i
9:          sumx2 = sumx2 + x_i * x_i
10:     end for
11:     xm = sumx/n
12:     ym = sumy/n
13:     a_1 = (n * sumxy - sumx * sumy)/(n * sumx2 - sumx * sumx)
14:     a_0 = ym - a_1 * x_m
15:     for i=1,n do
16:         st = st + (y_i - ym)^2
17:         sr = sr + (y_i - a_1 * x_i - a_0)^2
18:     end for
19:     s_{y/x} = sqrt(sr/(n - 2))
20:     r^2 = (st - sr)/st
21: end function
```

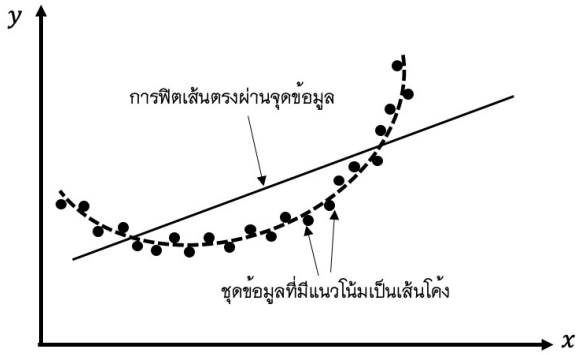
4.2.2 การถดถอยพหุนาม (Polynomial regression)

การทำการถดถอยเชิงเส้นเป็นการนำเสนอแนวโน้มของข้อมูลด้วยลักษณะของเส้นตรง แต่โดยทั่วไปแล้วข้อมูลในด้านวิศวกรรมมักจะมีลักษณะของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear) ดังนั้นการทำการถดถอยด้วยเส้นตรงจึงไม่เหมาะสม ดังแสดงในรูปที่ 4.7 ในกรณีเช่นนี้ เราสามารถใช้ระเบียบวิธีทำการถดถอยพหุนามในการฟิตข้อมูล โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการพหุนามอันดับที่ m ดังต่อไปนี้

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \tag{4.26}$$

ถ้าข้อมูลมี จำนวน n จุด (x_i, y_i) โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, n$ ค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลแต่ละจุดที่ได้จากการทำการถดถอยพหุนามสามารถแสดงได้ดังนี้

$$e_i = y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m \tag{4.27}$$



รูปที่ 4.7: ลักษณะของการฟิตความสัมพันธ์แบบเส้นตรงบนข้อมูลที่มีแนวโน้มเป็นเส้นโค้ง

และผลรวมของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง คือ

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m)^2 \tag{4.28}$$

หากการทำฟิตด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least squares) เราจะทำการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของ $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ที่ทำให้ได้ค่า S มีค่าน้อยที่สุดด้วยการคำนวณหาอนุพันธ์ของ S เทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวแล้วกำหนดให้เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m)^2 = 0; \\
\frac{\partial S}{\partial a_1} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m)^2 = 0; \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{\partial S}{\partial a_m} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m)^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

จัดสมการ (4.29) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
a_0(n) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \cdots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) + \cdots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&\vdots \\
a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2}\right) + \cdots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m}\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i
\end{aligned} \tag{4.30}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_m$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (4.30) ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงเส้นที่ได้กล่าวไปในบทก่อนหน้านี้แล้ว

ตัวอย่าง 4.3. *ความเร็วของของไหลในชั้นขอบเขต (Boundary layer) ที่เกิดจากการพาความร้อนแบบอิสระ (Free convection) บนแผ่นเรียบแนวตั้ง สามารถแสดงได้ดังนี้*

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
x_i *(thickness)*	*0.0*	*0.2*	*0.4*	*0.6*	*0.8*	*1.0*
y_i *(velocity)*	*0.00*	*1.05*	*0.85*	*0.35*	*0.10*	*1.00*

ให้ฟิตข้อมูลข้างต้นนี้ด้วยฟังก์ชันพหุนามลำดับขั้น 2

วิธีทำ

$$m = 2, n = 6, \sum_{i=1}^{n} x_i = 3.0, \sum_{i=1}^{n} y_i = 3.35$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2.20, \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1.80, \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 1.5664$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1.84, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 1.368$$

$$6.0a_0 + 3.0a_1 + 2.2a_2 = 3.35 \tag{4.31}$$

$$3.0a_0 + 2.2a_1 + 1.8a_2 = 1.84 \tag{4.32}$$

$$2.2a_0 + 1.8a_1 + 1.5664a_2 = 1.368 \tag{4.33}$$

จากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_0, a_1, และ a_2 จะได้คำตอบดังนี้

$$a_0 = 0.383927, a_1 = 0.659830, \text{และ } a_2 = -0.424115$$

สมการพหุนามลำดับขั้น 2 ที่ใช้ในการฟิตชุดข้อมูลของตัวอย่างนี้คือ

$$y(x) = 0.383927 + 0.659830x - 0.424115x^2$$

Pseudocode 15 Coefficient matrix generate for polynomial regression

```
1: function CoefMatrix(x, y, n, order)
2:     for i = 1, order + 1 do
3:         for j = 1, i do
4:             k = i + j − 2
5:             sum = 0
6:             for l = 1, n do
7:                 sum = sum + x_l^k
8:             end for
9:             a_{i,j} = sum
10:            a_{j,i} = sum
11:        end for
12:        sum = 0
13:        for l = 1, n do
14:            sum = sum + y_l * x_l^{i−1}
15:        end for
16:        a_{i,order+2} = sum
17:    end for
18: end function
```

โดยทั่วไปแล้วอันดับของพหุนามที่ต่ำจะให้ผลการฟิตที่ดีกว่าพหุนามอันดับสูง หากลำดับขั้นของพหุนามมากกว่า 4 หรือ 5 จะทำให้การฟิตของข้อมูลไม่เหมาะสม และความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษจะทำให้ความถูกต้องของการทำการถดถอยลดลง การคำนวณความถูกต้องของการทำการถดถอยพหุนามสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีเดียวกับการคำนวณความถูกต้องของระเบียบวิธีถดถอยเชิงเส้น

4.2.3 การถดถอยไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Regression)

การทำการถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุดนั้น ไม่ได้จำกัดอยู่แต่เพียงการทำแบบเชิงเส้น หรือ แบบพหุนามเท่านั้น ในบางครั้งเราอาจจะเลือกฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นอื่น ๆ มาทำการถดถอยได้ด้วย เช่น

$$y = a_1 \sin(\omega x) + a_2 \cos(\omega x) \tag{4.34}$$

โดยที่ ω คือค่าคงที่ของความถี่ a_1 และ a_2 คือค่าคงที่ ๆ ต้องคำนวณ หากข้อมูลที่มีคือ (x_i, y_i) โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, n$ ผลรวมของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง คือ

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 \sin(\omega x_i) - a_2 \cos(\omega x_i))^2 \tag{4.35}$$

หากทำการคำนวณค่าอนุพันธ์ของ S เทียบกับ a_1 และ a_2 แล้ว กำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ค่า

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2\omega \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 \sin(\omega x_i) - a_2 \cos(\omega x_i)) \cos(\omega x_i) = 0 \tag{4.36}$$

และ

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2\omega \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 \sin(\omega x_i) - a_2 \cos(\omega x_i)) \sin(\omega x_i) = 0 \tag{4.37}$$

จัดรูปของสมการ (4.36) และ (4.37) ใหม่จะได้

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} (\sin \omega x_i \cos \omega x_i) & \sum_{i=1}^{n} (\cos^2 \omega x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (\sin^2 \omega x_i) & \sum_{i=1}^{n} (\sin \omega x_i \cos \omega x_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} (y_i \cos \omega x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i \sin \omega x_i) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ a_0 และ a_1 ของสมการการถดถอย สามารถคำนวณได้จาก (4.38)

อีกตัวอย่างหนึ่งของการทำการถดถอยด้วยวิธีไม่เป็นเชิงเส้นนั่นก็คือฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียล

$$y = ae^{bx} \tag{4.39}$$

โดยที่ a และ b เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่ต้องคำนวณหา หากข้อมูลที่มีคือ (x_i, y_i) โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, n$ ค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง คือ

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ae^{bx_i})^2 \tag{4.40}$$

ค่า S น้อยที่สุดก็สามารถคำนวณได้จาก

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ae^{bx_i}) e^{bx_i} = 0 \tag{4.41}$$

และ

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ae^{bx_i}) x_i e^{bx_i} = 0 \tag{4.42}$$

เขียน (4.41) และ (4.42) ใหม่จะได้

$$a \sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i e^{bx_i} \tag{4.43}$$

และ

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i e^{2bx_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e^{bx_i} \tag{4.44}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b สามารถคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสัน ที่อยู่ในหัวข้อระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (System of nonlinear equations) ได้

4.2.4 การทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearization)

สำหรับสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยใช้วิธีการแปลงรูปฟังก์ชันก่อน จากนั้นจึงสามารถใช้การทำถดถอยเชิงเส้นมาฟิต เนื่องจากการฟิตตัวฟังก์ชันเชิงเส้นนั้นจะง่ายและเร็วกว่าการฟิตด้วยฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นมาก เช่น

$$y = ae^{bx} \tag{4.45}$$

สมการนี้สามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยเทคล็อกการิทึมทั้งสองข้าง

$$\ln y = \ln a + bx \ln e = \ln a + bx \tag{4.46}$$

หากเรานิยามตัวแปร $Y = \ln y$ เราสามารถใช้การถดถอยเชิงเส้นในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ ของสมการข้างต้นได้ดังนี้

$$Y = a_0 + a_1 x \tag{4.47}$$

โดยที่ $a_0 = \ln a$ และ $a_1 = b$ เป็น สัมประสิทธิ์ค่าใหม่ ที่สามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของความสัมพันธ์ได้ด้วยวิธีถดถอยเชิงเส้น ตัวอย่างสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่สามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ แสดงไว้ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1: รูปสมการไม่เป็นเชิงเส้น ที่สามารถเปลี่ยนให้เป็นรูปเชิงเส้นได้

Original Relation	Transformation and Linear Relation, $\bar{y} = c\bar{x} + d$
1. $y = ax^b$	$\ln y = \ln a + b \ln x$
	$\bar{y} = \ln y, \bar{x} = \ln x, c = b, d = \ln a$
2. $y = ae^{bx}$	$\ln y = \ln a + bx$
	$\bar{y} = \ln y, \bar{x} = x, c = b, d = \ln a$
3. $y = \frac{ax}{b+x}$	$\frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax}$
	$\bar{y} = \frac{1}{y}, \bar{x} = \frac{1}{x}, c = \frac{b}{a}, d = \frac{1}{a}$
4. $y = \frac{a}{b+x}$	$\frac{1}{y} = \frac{b+x}{a}$
	$\bar{y} = \frac{1}{y}, \bar{x} = x, c = \frac{1}{a}, d = \frac{b}{a}$
5. $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$	$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + \cdots + a_n \ln x_n$
	$\bar{y} = c_0 + c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \cdots + c_n \bar{x}_n$
	$\bar{y} = \ln y, c_0 = \ln a_0, c_i = a_i, \bar{x}_i = \ln x_i, i = 1, 2, \dots, n$

ตัวอย่าง 4.4. *ขนาดการสั่นสะเทือนของเครื่องจักร x_i ที่วัดค่าไว้ ณ เวลา t_i มีผลแสดงดังตาราง*

i	1	2	3	4
t_i(sec)	0	2	4	6
x_i(mm)	5.0	3.7	2.7	2.0

ให้ฟิตเส้นโค้งด้วย

$$x(t) = ae^{-bt} \tag{E1}$$

วิธีทำ *โดยการเทคล็อกการิทึม สมการ* (E1) *เราจะได้สมการเชิงเส้น*

$$\ln x = \ln a - bt \tag{E2}$$

หากเรานิยาม $y = \ln x$, $c = \ln a$, $d = -b$ เราสามารถเขียนสมการ (E2) *ใหม่ได้ว่า*

$$y = c + dt \tag{E3}$$

และค่า S สามารถคำนวณได้จาก

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - c - dt_i)^2 \tag{E4}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนของข้อมูล ดังนั้นค่าต่ำสุดของ S จะคำนวณได้จาก

$$nc + d\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{E5}$$

และ

$$c\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) + d\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i \tag{E6}$$

ในกรณีนี้ $n = 4$ และสมการ (E5) *และ* (E6) *จะอยู่ในรูปของ*

$$4c + 12d = 4.6040 \tag{E7}$$

$$12c + 56d = 10.7480 \tag{E8}$$

และค่าสัมประสิทธิ์ คือ $c = 0.6914$ *และ* $d = 0.1532$ *ซึ่งจะทำให้ได้ค่า* $a = e^c = 1.9965$ *และ* $b = 0.532$ *ดังนั้น สมการถดถอยของตัวอย่างนี้คือ*

$$x(t) = 1.9965e^{-0.1532t}\ mm. \tag{E9}$$

4.2.5 การถดถอยหลายตัวแปร (Multiple variables regression)

ในหลายกรณี ข้อมูลที่เราต้องการวิเคราะห์นั้นขึ้นอยู่กับตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัว เช่น ความดันของก๊าซขึ้นอยู่กับปริมาตรและอุณหภูมิ ดังนั้นหากข้อมูลที่เก็บมาจากการทดลอง y เป็นตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x_1, x_2, ..., x_n และเราต้องการหาความสัมพันธ์ของ

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_m) \tag{4.48}$$

เราสามารถใช้ระเบียบวิธีของฟังก์ชันตัวแปรเดียวมาประยุกต์ใช้กับหลายตัวแปรได้ และส่วนมากแล้วความสัมพันธ์เชิงเส้นจะถูกนำมาใช้เนื่องจากง่ายต่อการคำนวณ ดังแสดงในสมการ (4.49)

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m \tag{4.49}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ a_0, a_1, a_2, ..., a_m เป็นค่าที่จะต้องคำนวณเพื่อกำหนดความสัมพันธ์ของชุดข้อมูล และค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองคือ

$$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_{1,i} - a_2x_{2,i} - \ldots - a_mx_{m,i})^2 \tag{4.50}$$

ในการทำให้ค่า S มีค่าน้อยที่สุด จะต้องหาค่าอนุพันธ์ของ S เทียบกับตัวแปร a_0, a_1, a_2, ..., a_m แล้วให้เท่ากับศูนย์ ซึ่งจะได้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} & \cdots & \sum x_{m,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i}x_{2,i} & \cdots & \sum x_{1,i}x_{m,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i}x_{2,i} & \sum x_{2,i}^2 & \cdots & \sum x_{2,i}x_{m,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \sum x_{m,i} & \sum x_{1,i}x_{m,i} & \sum x_{2,i}x_{m,i} & \cdots & \sum x_{m,i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i}y_i \\ \sum_{x_{2,i}y_i} \\ \vdots \\ \sum x_{m,i}y_i \end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

ค่าความถูกต้องของการถดถอยหลายตัวแปร (Multiple linear regression) นี้ก็สามารถคำนวณได้จาก

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ เช่นเดียวกับการทำการถดถอยแบบตัวแปรเดียว

ตัวอย่าง 4.5. *ข้อมูลการทดลอง y_i ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร 2 ตัว คือ x_{1i}, และ x_{2i}*

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
x_{1i}	*10*	*10*	*20*	*50*	*60*	*60*
x_{2i}	*5*	*45*	*25*	*25*	*5*	*45*
y_i	*50*	*40*	*36*	*32*	*32*	*19*

ให้ใช้การถดถอยเชิงเส้นในการหาความสัมพันธ์ของชุดข้อมูลนี้

วิธีทำ

จากความสัมพันธ์เชิงเส้นของตัวแปรจะได้ว่า

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{E1}$$

และผลรวมของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง คือ

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})^2 \tag{E2}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ของ S เมื่อเทียบกับ a_0 ถึง a_2 คือ

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) = 0; \tag{E3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) = 0; \tag{E4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) = 0; \tag{E5}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$na_0 + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{E6}$$

$$a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i}, \tag{E7}$$

$$a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x1ix2i\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i}, \tag{E8}$$

จากข้อมูลในสมการ (E6) - *สมการ* (E8)*จะได้ว่า*

$$6a_0 + 210a_1 + 150a_2 = 209; \tag{E9}$$

$$210a_0 + 10300a_1 + 5250a_2 = 6280; \tag{E10}$$

$$150a_0 + 5250a_1 + 5350a_2 = 4765. \tag{E11}$$

คำตอบของสมการ (E9) - *สมการ* (E11) *คือ* $a_0 = 52.300507$, $a_1 = 0.350848$, $a_2 = 0.287500$ *ซึ่งจะทำให้ได้สมการของความสัมพันธ์คือ*

$$y(x_1, x_2) = 52.30057 - 0.350848(x_1) - 0.287500(x_2)$$

Pseudocode 16 Coefficient matrix generate for multiple regression

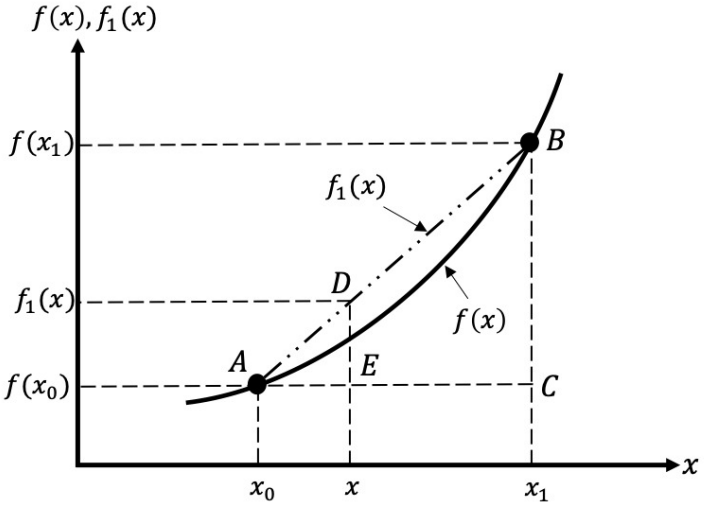
```
1: function CoefMatrix(x, n, order)
2:     for i = 1, order + 1 do
3:         for j = 1, i do
4:             sum = 0
5:             for l = 1, n do
6:                 sum = sum + x_{i-1,l} * x_{j-1,l}
7:             end for
8:             a_{i,j} = sum
9:             a_{j,i} = sum
10:        end for
11:        sum = 0
12:        for l = 1, n do
13:            sum = sum + x_{i-1,l}
14:        end for
15:        a_{i,order+2} = sum
16:    end for
17: end function
```

4.3 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

เป็นวิธีประมาณค่าระหว่างช่วงข้อมูลที่เก็บมาโดยใช้ฟังก์ชันจากวิธีคอลโลเคชันซึ่งจะเรียกได้อีกชื่อว่า ฟังก์ชันประมาณค่า (Interpolation function) เราสามารถใช้ฟังก์ชันพหุนาม, Spline หรืออนุกรมฟูริเยร์มาทำฟังก์ชันประมาณค่าได้ แต่ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันที่ใช้บ่อยที่สุด

4.3.1 การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น (Linear Interpolation)

หากมีข้อมูลเพียงแค่สองจุด $x_0, f(x_0)$ และ $x_1, f(x_1)$ จุดทั้งสองนี้สามารถเชื่อมโดยเส้นตรงในการทำการประมาณค่า (Interpolation) เรียกว่าการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น ดังแสดงในรูป 4.8 สมการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นสามารถคำนวณได้จากสามเหลี่ยมคล้าย ADE และ ABC จะได้ว่า



รูปที่ 4.8: การทำการประมาณในช่วงเชิงเส้น

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}, \text{ or } \frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.52}$$

โดยที่ $f_1(x)$ คือ สมการพหุนามที่ใช้ในการทำการประมาณค่า (Interpolation) ตัวห้อย 1 แสดงถึงอันดับของสมการพหุนาม สมการ (4.52) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$f_1(x) = f(x_0) + \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} (x - x_0) \tag{4.53}$$

และ

$$f_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \tag{4.54}$$

โดยที่ a_0 และ a_1 คือค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม และ a_1 คือ การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการด้วยวิธีผลต่างแบบจำกัด (Finite difference)

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.55}$$

ตัวอย่าง 4.6. *จงทำการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น (Linear interpotaiton) ของฟังก์ชัน $e^{0.5x}$ โดยให้ค่า $x_0 = 0$ และ $x_1 = 2$ ในการประมาณค่าที่ $x = 1$*

วิธีทำ

ค่าของฟังก์ชัน $f(x_0) = f(0) = 1.0$ และ $f(x_1) = f(2) = 2.718282$
ดังนั้น

$$f_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \tag{E1}$$

โดยที่ $a_0 = f(x_0) = 1.0$ และ

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2.718282 - 1.0}{2.0 - 0.0} = 0.859141$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ลงในสมการ (E1) *จะสามารถเขียนได้ว่า*

$$f_1(x) = a_0 + 0.859141(x - x_0) \tag{E2}$$

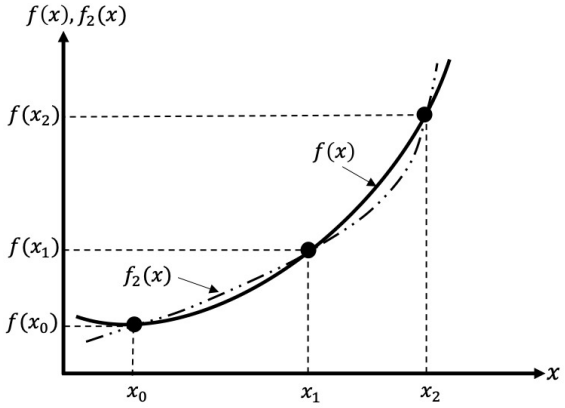
ใช้สมการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) ในการประมาณค่าที่ $x = 1.0$ ได้

$$f_1(1) = 1.0 + 0.859141(1) = 1.859141$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจริง $f(1) = 1.648721$ จะเห็นว่าการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นมีความคลาดเคลื่อนอยู่ 12.76262%

4.3.2 การประมาณค่าในช่วงควอดราติก (Quadratic interpolation)

ถ้าเรามีข้อมูลของคู่อันดับสามชุด เช่น $x_0, f(x_0)$, $x_1, f(x_1)$ และ $x_2, f(x_2)$ เราสามารถใช้สมการพหุนามอันดับที่สอง หรือสมการควอดราติก (Quadratic) มาฟิต ดังแสดงในรูป 4.9



รูปที่ 4.9: การทำการประมาณค่าในช่วงควอดราติก

$$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{4.56}$$

โดยที่ $f_2(x)$ คือสมการพหุนามอันดับสอง และค่า a_0, a_1 และ a_2 ก็คือค่าสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการฟิตข้อมูลทั้งสาม นั่นเอง และจากความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้ว่า

$$a_0 = f(x_0) \tag{4.57}$$

ที่ $x = x_1$, $f_2(x = x_1) = f(x_1)$ จะได้ว่า

$$f_2(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

จัดสมการใหม่ได้ว่า

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.58}$$

ที่ $x = x_2$ จะได้

$$f_2(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(y_2 - x_1)$$

หรือจัดรูปสมการใหม่ได้

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \tag{4.59}$$

แทนค่า สมการ (4.57) และสมการ (4.58) ลงใน สมการ (4.59) จะได้ว่า

$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)} \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} \tag{4.60}$$

จะสังเกตได้ว่าสองเทอมแรกของสมการ (4.56) จะเหมือนกับการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นในสมการ (4.54) ซึ่งแสดงให้เห็นได้ว่าการคำนวณด้วยอันดับที่ต่ำกว่า สามารถนำมาใช้ต่อได้ หากเราเพิ่มอันดับของการทำ

ประมาณค่าในช่วง ค่าสัมประสิทธิ์ a_1 เป็นการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งด้วยผลต่างแบบจำกัด และค่า a_2 คือการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่สองด้วยผลต่างแบบจำกัดนั่นเอง

ตัวอย่าง 4.7. *จงทำการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) ของ $e^{0.5x}$ ด้วย สมการควอดราติก (Quadratic) โดยใช้ค่า $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ และ $x_2 = 4$ ในการประมาณค่าที่ $x = 1$*

วิธีทำ

คำนวณค่าฟังก์ชัน f ที่ตำแหน่ง x_0, x_1 และ x_2

$$f(x_0) = f(0) = 1.0$$

$$f(x_1) = f(2) = 2.718282$$

$$f(x_2) = f(4) = 7.389056$$

ดังนั้น

$$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{E1}$$

จะได้สัมประสิทธิ์ a_0 ถึง a_2 ดังนี้

$$a_0 = f(x_0) = 1.0$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.859141$$

และ

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) = 0.3690615$$

ดังนั้นสมการประมาณค่าของตัวอย่างนี้คือ

$$f_2(x) = 1.0 + 0.859141x + 0.3690615x(x - 2.0) \tag{E2}$$

เมื่อทำการ Interpolation ของ $e^{0.5x}$ ที่ $x = 1$ จะได้

$$f_2(1) = 1.0 + 0.859141(1) + 0.3690615(1)(1 - 2.0) = 1.4900795$$

เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบจริงของ $e^{0.5(1)} = 1.648721$ จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าในช่วงควอดราติกมีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 9.622095%

4.3.3 การประมาณค่าในช่วงแบบพหุนามลำดับขั้นที่ n^{th} (n^{th} – order Polynomial Interpolation)

จากคุณลักษณะของการทำการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการเส้นตรงและสมการควอดราติก สมการ (4.54) และสมการ (4.56) เราสามารถแสดงสมการพหุนามอันดับที่ n ได้ว่า

$$\begin{aligned} f_n(x) =& a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+ \\ & \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.61}$$

สมการ (4.61) มีชื่อเรียกว่า "Newton's divided - difference interpolating polynomial" โดยที่ตัวห้อย n คือ อันดับของสมการพหุนาม และสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าที่จะต้องคำนวณจากข้อมูลจำนวน $n+1$ จุด ถ้าเรานิยามฟังก์ชัน $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots$, เพื่อที่จะใช้ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ โดยที่จุด $[x_0, f(x_0)]$ เราจะได้

$$a_0 = f(x_0) \equiv g(x_0) \tag{4.62}$$

แทนค่า $x_1, f(x_1)$ ลงในสมการ (4.61) จะได้

$$a_1 = \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} \equiv g(x_1, x_0) \tag{4.63}$$

เมื่อแทนค่า $x_2, f(x_2)$ ลงในสมการ (4.61) จะได้

$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)} \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} \equiv g(x_2, x_1, x_0) \tag{4.64}$$

และในลักษณะเดียวกัน เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ว่า

$$\begin{aligned} a_3 \equiv& g(x_3, x_2, x_1, x_0); \\ & \vdots \\ a_n \equiv& g(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0) \end{aligned} \tag{4.65}$$

พิจารณาสมการ (4.62) – (4.65) จะเห็นได้ว่าฟังก์ชัน $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[y_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0]$ คือ ผลต่างแบบจำกัด ที่อันดับต่าง ๆ นั่นเอง

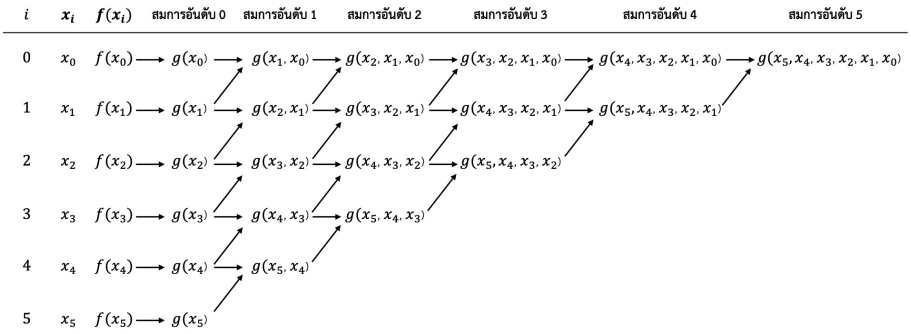
$$g(x_0) = f(x_0) \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned} g(x_1,x_0) &= \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ g(x_2,x_1,x_0) &= \frac{g(x_2,x_1)-g(x_1,x_0)}{x_2-x_0} \\ &= \frac{1}{x_2-x_0}\left\{\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}\right\} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.67}$$

$$g(x_n,x_{n-1},\ldots,x_2,x_1,x_0) = \frac{g(x_n,x_{n-1},\ldots,x_2,x_1)-g(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_1,x_0)}{x_n-x_0} \tag{4.68}$$

สมการ (4.68) คือรูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันที่ใช้ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง เราสามารถเขียนฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง ให้อยู่ในรูปของสมการ (4.62) – (4.65) ได้ว่า

$$\begin{aligned} f_n(x) =& g(x_0) + (x-x_0)g(x_1,x_0) + (x-x_0)(x-x_1)g(x_2,x_1,x_0) + \\ & \ldots + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})g(x_n,x_{n-1},\ldots,x_2,x_1,x_0) \end{aligned} \tag{4.69}$$



รูปที่ 4.10: ตาราง Newton finite divided differences

โครงสร้างของ Newton finite divided differences แสดงให้เห็นดังรูปที่ 4.10

ตัวอย่าง 4.8. *ให้ประมาณค่าในช่วงของฟังก์ชัน* $e^{0.5x}$ *ด้วย* ***Newton's polynomial*** *อันดับ 3 โดยใช้ค่า* $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$ *และ* $x_3 = 5$ *แล้วทำการประมาณค่าที่* $x = 1$

วิธีทำ

$$g(x_0) = f(x_0) = 1.0;$$

$$g(x_1) = f(x_1) = 2.718282;$$

$$g(x_2) = f(x_2) = 7.389056;$$

$$g(x_3) = f(x_3) = 12.182494;$$

$$g(x_1, x_0) = \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.859141;$$

$$g(x_2, x_1) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x - 1} = 2.335387;$$

$$g(x_3, x_2) = \frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} = 4.793438;$$

$$g(x_2, x_1, x_0) = \frac{g(x_2, x_1) - g(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = 0.3690615;$$

$$g(x_3, x_2, x_1) = \frac{g(x_3, x_2) - g(x_2, x_1)}{x_3 - x_1} = 0.819350;$$

$$g(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{g(x_3, x_2, x_1) - g(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0} = 0.0900577;$$

ดังนั้น การประมาณค่าในช่วง ด้วย **Newton's polynomial** *อันดับ* **3** *ทำได้ด้วยการแทนค่าข้างต้นลงในสมการ* (4.69) *โดยที่* $n = 3$

$$\begin{aligned} f_3(x) =& g(x_0) + (x - x_0)g(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)g(x_2, x_1, x_0) \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)g(x_3, x_2, x_1, x_0) \\ =& 1.0 + 0.859141x + 0.3690615x(x - 2) + 0.0900577x(x - 2)(x - 4) \end{aligned}$$

ค่า $f_3(1)$ *ถ้า* $x = 1$ *จะคำนวณได้ว่า*

$$f_3(1) = 1.0 + 0.859141 - 0.3690615 + 0.2701731 = 1.7602526$$

ค่าที่ได้ $f(1) = e^{0.5x} = 1.648721$, *ค่าความคลาดเคลื่อน* $f_3(1)$ *สามารถหาค่าได้เท่ากับ* **6.764735%**

4.3.4 การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนาม (Spline Interpolation)

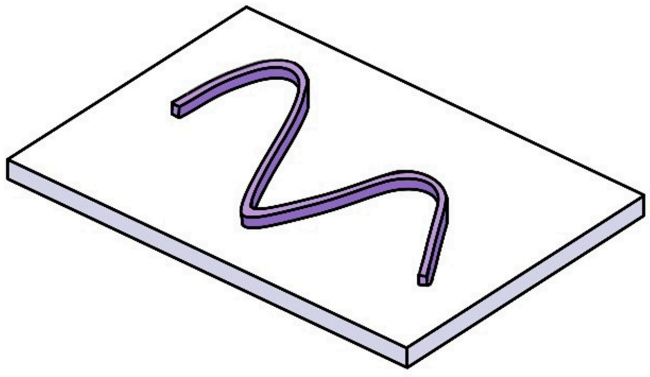
สมการพหุนามอันดับที่ n^{th} สามารถนำใช้ประมาณค่าในช่วงสำหรับข้อมูลจำนวน $n + 1$ ข้อมูลดังได้กล่าวไปข้างต้นแล้ว อย่างไรก็ตามการฟิตข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมาก และด้วยสมการพหุนามอันดับที่สูงมาก ๆ นั้น ก็อาจจะทำให้แนวโน้มของความสัมพันธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนสูง และผิดไปจากความสัมพันธ์ที่ควรจะเป็นจริง ๆ ได้ ดังนั้นแบ่งข้อมูลทั้งหมดเป็นชุดข้อมูลย่อยจำนวนไม่มาก แล้วใช้สมการพหุนามอันดับต่ำมาทำการฟิตหาความสัมพันธ์ในแต่ละชุดข้อมูลย่อย จากนั้นจึงนำสมการพหุนามของกลุ่มข้อมูลย่อยนั้นมาพล็อตต่อกันสำหรับชุดข้อมูลทั้งหมด จึง

Pseudocode 17 Newton's interpolating polynomial

```
1: function NewtonInt(x, y, n, xi, yint, ε_a)
2:     fdd[0 : n, 0 : n] = 0
3:     for i = 0, n do
4:         fdd_{i,0} = y_i
5:     end for
6:     for j = 1, n do
7:         for i = 0, n − j do
8:             fdd_{i,j} = (fdd_{i+1,j−1} − fdd_{i,j−1})/(x_{i+j} − x_i)
9:         end for
10:    end for
11:    xterm = 1
12:    yint_0 = fdd_{0,0}
13:    for order = 1, n do
14:        xterm = xterm ∗ (xi − x_{order−1})
15:        int2 = yint_{order−1} + fdd_{0,order} ∗ xterm
16:        ε_{a(order−1)} = yint2 − yint_{order−1}
17:        yint_{order} = yint2
18:    end for
19: end function
```

เป็นอีกวิธีหนึ่งในการฟิตหาความสัมพันธ์ข้อมูล และการประมาณค่าในช่วงของข้อมูลที่ต้องการนั้น ก็จะใช้สมการพหุนามของชุดข้อมูลย่อยนั้นมาทำการคำนวณหาคำตอบ วิธีนี้เรียกว่า การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนาม (Spline Interpolation)

แนวคิดของการฟิตเส้นโค้งมาจากเทคนิคการวาดเส้นโค้งในการเขียนแบบวิศวกรรม ที่ใช้อุปกรณ์การเขียนแบบที่เรียกว่า "กระดูกงู" (Spline) ในการวาดเส้นโค้งผ่านจุดต่าง ๆ ให้มีความต่อเนื่องดังแสดงในรูปที่ 4.11 ฟังก์ชันพหุนามที่นิยมนำมาใช้ในวิธีนี้คือฟังก์ชันพหุนามอันดับที่หนึ่งถึงอันดับที่สาม ซึ่งจะได้อธิบายในรายละเอียดต่อไป



รูปที่ 4.11: การวาดเส้นโค้งในการเขียนแบบด้วยกระดูกงู (Spline)

การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามเชิงเส้น (Linear Splines)

วิธีประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามเชิงเส้น เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดเนื่องจากเป็นการใช้สมการพหุนามอันดับที่หนึ่งประมาณค่าระหว่างจุดข้อมูลสองจุด ดังนั้นสมการพหุนามอันดับหนึ่งสำหรับชุดข้อมูลทั้งหมดจำนวน $n+1$ จุด ก็จะมีสมการพหุนามอันดับหนึ่งสำหรับประมาณค่าในช่วงทั้งหมด $n-1$ สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + m_0(x - x_0) && x_0 \le x \le x_1 \\ f(x) &= f(x_1) + m_1(x - x_1) && x_1 \le x \le x_2 \\ &\vdots \\ f(x) &= f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) && x_{n-1} \le x \le x_n \end{aligned} \tag{4.70}$$

โดยที่ m_i คือความชันของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุด

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.71}$$

การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามเชิงเส้นนี้สามารถทำได้โดยการคำนวณหาค่า m_i นั่นเอง และการประมาณค่าของข้อมูลก็ทำได้โดยการเลือกใช้สมการย่อยที่อยู่ในสมการ (4.70) ที่ตรงกับช่วงที่ต้องการคำนวณ

ตัวอย่าง 4.9. *จงฟิตข้อมูลในตารางข้างล่างนี้ด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามเชิงเส้น และคำนวณหาค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง* $x = 5$

i	0	1	2	3
x	3	4.5	7.0	9.0
$f(x)$	2.5	1.0	2.5	0.5

วิธีทำ

ในช่วง $i = 0$ *ถึง* $i = 1$

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 2.5}{4.5 - 3.0} = -1 \tag{4.72}$$

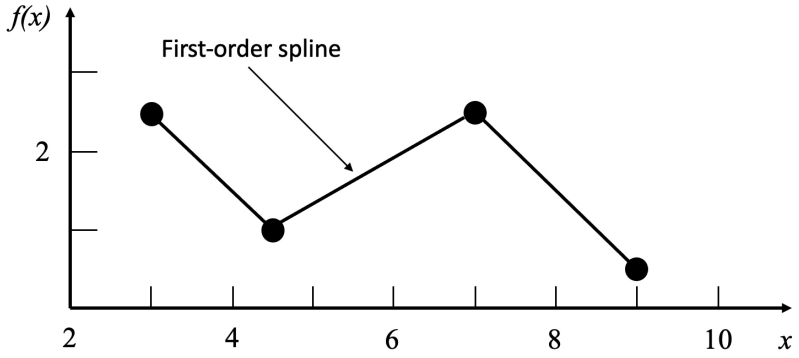
ดังนั้น ค่า mของฟังก์ชันในแต่ละช่วงข้อมูลจึงมีค่าเท่ากับ

i	*1*	*2*	*3*
m_i	*-1.0*	*0.6*	*-1.0*

ค่าของ $f(x=5)$ *จะสามารถประมาณค่าได้จากสมการของช่วง* $i=1$ *ที่เป็นสมการของช่วงข้อมูล* $4.5 \le x \le 7.0$ *ได้ดังนี้*

$$f(x=5) = 1.0 + 0.6(5-4.5) = 1.3 \tag{4.73}$$

การใช้ฟังก์ชันเสมือนพหุนามเชิงเส้นในการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลแสดงได้ดังรูป 4.12 ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีข้อเสียคือความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ได้ในแต่ละช่วงจะไม่มีความต่อเนื่อง เพราะว่าค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งซึ่งเป็นความชันของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ณ จุดรอยต่อของฟังก์ชันมีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ด้วยการใช้สมการพหุนามที่มีอันดับสูงขึ้น



รูปที่ 4.12: การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามเชิงเส้น

การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันควอดราติก (Quadratic Splines)

ในการที่จะทำให้ฟังก์ชันย่อยของแต่ละช่วงข้อมูลนั้นมีความต่อเนื่องจำเป็นจะต้องทำให้ค่าความชัน ณ จุดรอยต่อมีค่าเท่ากัน ซึ่งทำได้ด้วยการใช้ฟังก์ชันพหุนามที่มีอันดับสูงกว่าหนึ่ง (หากต้องการให้อนุพันธ์อันดับที่ m มีค่าเท่ากัน จะต้องใช้สมการพหุนามอันดับที่ $m+1$) ดังนั้นการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันควอดราติกที่ใช้สมการพหุนามอันดับที่สองจะเป็นการประมาณค่าที่ทำให้เกิดความชันของฟังก์ชัน ณ จุดรอยต่อมีค่าเท่ากัน ซึ่งจะทำให้ฟังก์ชันในแต่ละช่วงมีความต่อเนื่อง การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันควอดราติกจะมีรูปแบบของสมการย่อยในแต่ละช่วงดังนี้

$$f_i(x) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i \tag{4.74}$$

โดยที่ a_i, b_i, c_i คือค่าคงที่ของฟังก์ชันที่ต้องคำนวณ ถ้าข้อมูลมีจำนวน $n+1$ จุด จะมีจำนวนฟังก์ชันย่อยทั้งหมด n ฟังก์ชัน ก็จะมีตัวแปรไม่รู้ค่าที่ต้องคำนวณทั้งหมด $3n$ ตัว ซึ่งจะต้องใช้เงื่อนไข หรือจำนวนสมการทั้งหมด $3n$ สมการในการคำนวณด้วยเช่นกัน ดังมีรายละเอียดดังนี้

1. ค่าของฟังก์ชัน ($f(x)$) ของสองฟังก์ชันที่จุดข้อมูลร่วมต้องมีค่าเท่ากัน (มีจำนวน $n-1$ จุด เท่ากับ $2n-2$ สมการ)

$$a_{i-1} x_{i-1}^2 + b_{i-1} x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}) \tag{4.75}$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \tag{4.76}$$

2. ค่าของฟังก์ชัน ($f(x)$) แรกจะต้องผ่านจุดแรกของข้อมูล และค่าของฟังก์ชัน ($f(x)$) สุดท้ายต้องผ่านจุดสุดท้ายของข้อมูล (มีจำนวน 2 จุด เท่ากับ 2 สมการ)

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0) \tag{4.77}$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n) \tag{4.78}$$

3. ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ($f'(x)$) ของสองฟังก์ชันที่จุดข้อมูลร่วมต้องมีค่าเท่ากัน (มีจำนวน $n-1$ จุด เท่ากับ $n-1$ สมการ)

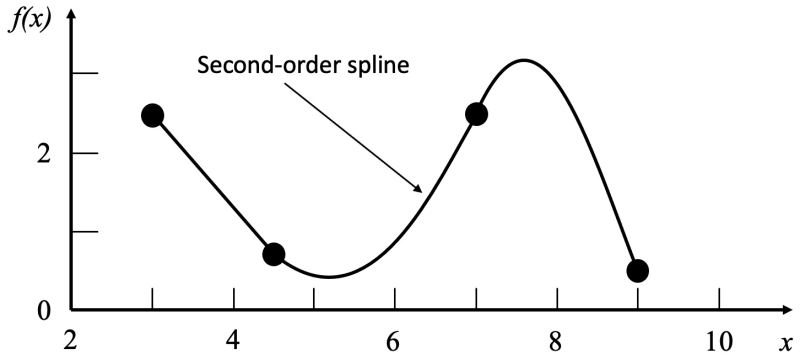
$$2a_{i-1} x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \tag{4.79}$$

4. ค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน ($f''(x)$) ของฟังก์ชันที่จุดแรกมีค่าเท่ากับศูนย์ (มีจำนวน 1 จุด เท่ากับ 1 สมการ)

$$a_1 = 0 \tag{4.80}$$

จากเงื่อนไขทั้งหมดข้างต้นจะทำให้ฟังก์ชันย่อยของการประมาณค่ามีความต่อเนื่องโดยมีลักษณะของการเชื่อมต่อที่เป็นเส้นตรงจากเงื่อนไขการกำหนดค่าของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน ณ จุดร่วมมีค่าเท่ากันนั่นเอง

วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันควอดราติกจะได้ลักษณะความสัมพันธ์ดังแสดงในรูปที่ 4.13 นี้จะเป็นการเชื่อมฟังก์ย่อยภายในด้วยเส้นตรงจากการกำหนดค่าความชันของสองฟังก์ชัน ณ ชุดเชื่อมต่อให้เท่ากัน จึงสังเกตได้ว่า ช่วงสองจุดแรกของข้อมูลจะเป็นเส้นตรง และการแกว่งของข้อมูลที่สูงในช่วงข้อมูลย่อยสุดท้าย ซึ่งหากใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันคิวบิกจะไม่มีลักษณะดังข้อสังเกตที่กล่าวมาข้างต้น



รูปที่ 4.13: การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันควอดราติก

ตัวอย่าง 4.10. *จงฟิตข้อมูลในตารางข้างล่างนี้ด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามอันดับที่สอง และคำนวณหาค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง* $x = 5$

i	*0*	*1*	*2*	*3*
x	*3*	*4.5*	*7.0*	*9.0*
$f(x)$	*2.5*	*1.0*	*2.5*	*0.5*

วิธีทำ *จากโจทย์จะเห็นว่ามีข้อมูลทั้งหมด* ***4*** *จุด และจะมีฟังก์ชันย่อยในการประมาณค่าทั้งหมด* ***3*** *ฟังก์ชัน เพราะฉะนั้นจะต้องมีเงื่อนไขหรือสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันทั้งหมด* $3(3) = 9$ *สมการ ดังนี้*

จากเงื่อนไขในสมการ (4.75) *และ* (4.76)

$$\begin{aligned} 20.25a_1 + 4.5b_1 + c_1 &= 1.0 \\ 20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 &= 1.0 \\ 49a_2 + 7b_2 + c_2 &= 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 &= 2.5 \end{aligned} \tag{4.81}$$

จากเงื่อนไขในสมการ (4.77) *และ* (4.78)

$$\begin{aligned} 9a_1 + 3b_1 + c_1 &= 2.5 \\ 81a_3 + 9b_3 + c_3 &= 0.5 \end{aligned} \tag{4.82}$$

จากเงื่อนไขในสมการ (4.79)

$$\begin{aligned} 9a_1 + b_1 &= 9a_2 + b_2 \\ 14a_2 + b_2 &= 14a_3 + b_3 \end{aligned} \tag{4.83}$$

และเงื่อนไขสุดท้ายจากสมการ (4.80) $a_1 = 0$ *จะเห็นได้ว่าสมการทั้งหมด 9 สมการอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงเส้นที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปของเมทริกได้ว่า*

$$[A] = \begin{bmatrix} 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

และสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันพหุนามทั้งหมดสามารถหาคำตอบได้ด้วยระเบียบวิธีของระบบสมการเชิงเส้นที่ได้กล่าวไปในบทก่อนหน้านี้แล้ว โดยมีคำตอบดังนี้

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & b_1 &= -1 & c_1 &= 5.5 \\ a_2 &= 0.64 & b_2 &= -6.76 & c_2 &= 18.46 \\ a_3 &= -1.6 & b_3 &= 24.6 & c_3 &= -91.3 \end{aligned}$$

สมการพหุนามอันดับสองของการประมาณค่าในแต่ละช่วงจึงมีค่าเท่ากับ

$$f_1(x) = -x + 5.5 \qquad 3.0 \le x \le 4.5$$

$$f_2(x) = 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 \qquad 4.5 \le x \le 7.0$$

$$f_3(x) = -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 \qquad 7.0 \le x \le 9.0$$

ค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง $x = 5$ *จึงจะคำนวณได้จากฟังก์ชัน* $f_2(x = 5) = 0.64(5)^2 - 6.76(5) + 18.46 = 0.66$

การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันคิวบิก (Cubic Splines)

วิธีนี้ใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่สามสำหรับประมาณค่าในแต่ละช่วงย่อย

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \tag{4.84}$$

ดังนั้นสำหรับข้อมูลจำนวน $n+1$ จุด ก็จะมีค่าสัมประสิทธิ์สำหรับฟังก์ชันประมาณค่าที่ต้องทำการคำนวณทั้งหมด $4n$ ค่า ซึ่งต้องใช้เงื่อนไข หรือจำนวนสมการทั้งหมด $3n$ สมการในการคำนวณด้วยเช่นกัน ดังมีรายละเอียดดังนี้

1. ค่าของฟังก์ชัน ($f(x)$) ของสองฟังก์ชันที่จุดข้อมูลร่วมต้องมีค่าเท่ากัน (มีจำนวน $n-1$ จุด เท่ากับ $2n-2$ สมการ)

$$a_{i-1}x_{i-1}^3 + b_{i-1}x_{i-1}^2 + c_{i-1}x_{i-1} + d_{i-1} = f(x_{i-1}) \tag{4.85}$$

$$a_i x_{i-1}^3 + b_i x_{i-1}^2 + c_i x_{i-1} + d_i = f(x_{i-1}) \tag{4.86}$$

2. ค่าของฟังก์ชัน ($f(x)$) แรกจะต้องผ่านจุดแรกของข้อมูล และค่าของฟังก์ชัน ($f(x)$) สุดท้ายต้องผ่านจุดสุดท้ายของข้อมูล (มีจำนวน 2 จุด เท่ากับ 2 สมการ)

$$a_1 x_0^3 + b_1 x_0^2 + c_1 x_0 + d_1 = f(x_0) \tag{4.87}$$

$$a_n x_n^3 + b_n x_n^2 + c_n x_n + d_n = f(x_n) \tag{4.88}$$

3. ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ($f'(x)$) ของสองฟังก์ชันที่จุดข้อมูลร่วมต้องมีค่าเท่ากัน (มีจำนวน $n-1$ จุด เท่ากับ $n-1$ สมการ)

$$3a_{i-1}x_{i-1}^2 + 2b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = 3a_i x_{i-1}^2 + 2b_i x_{i-1} + c_i \tag{4.89}$$

4. ค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน ($f''(x)$) ของสองฟังก์ชันที่จุดข้อมูลร่วมต้องมีค่าเท่ากัน (มีจำนวน $n-1$ จุด

เท่ากับ $n-1$ สมการ)

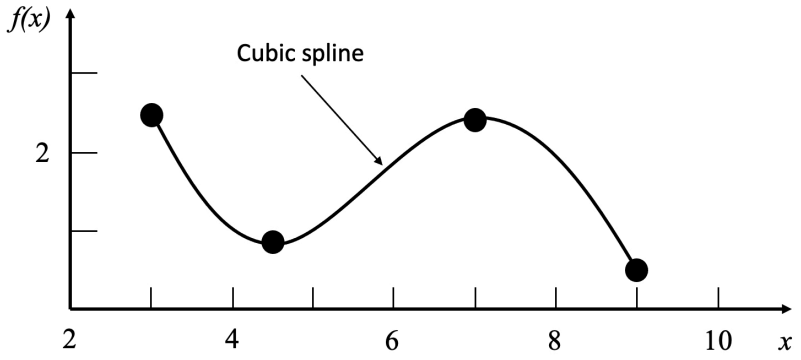
$$6a_{i-1}x_{i-1} + 2b_{i-1} = 6a_i x_{i-1} + 2b_i \tag{4.90}$$

5. ค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน ($f''(x)$) ของฟังก์ชันที่จุดแรกและจุดสุดท้ายมีค่าเท่ากับศูนย์ (มีจำนวน 2 จุด เท่ากับ 2 สมการ)

$$a_1 = a_n = 0 \tag{4.91}$$

จากเงื่อนไขทั้งหมดจำนวน $4n$ เงื่อนไขที่กล่าวมาข้างต้นสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนามอันดับที่สามทั้งหมดได้ด้วยระเบียบวิธีการแก้ปัญหาของระบบสมการเชิงเส้นเช่นเดียวกันกับการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันควอดราติก

วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันคิวบิกจะได้ลักษณะความสัมพันธ์ดังแสดงในรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14: การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนด้วยฟังก์ชันคิวบิก

ตัวอย่าง 4.11. *จงแสดงสมการเงื่อนไขสำหรับการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันคิวบิก ของข้อมูลในตารางข้างล่างนี้*

i	0	1	2	3
x	3	4.5	7.0	9.0
$f(x)$	2.5	1.0	2.5	0.5

วิธีทำ *จากโจทย์จะเห็นว่ามีข้อมูลทั้งหมด 4 จุด และจะมีฟังก์ชันย่อยในการประมาณค่าทั้งหมด 3 ฟังก์ชัน เพราะฉะนั้นจะต้องมีเงื่อนไขหรือสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันทั้งหมด* $4(3) = 12$ *สมการ ดังนี้*

จากเงื่อนไขในสมการ (4.85) *และ* (4.86)

$$\begin{aligned} 91.125a_1 + 20.25b_1 + 4.5c_1 + d_1 &= 1.0 \\ 91.125a_2 + 20.25b_2 + 4.5c_2 + d_2 &= 1.0 \\ 343a_2 + 49b_2 + 7c_2 + d_2 &= 2.5 \\ 343a_3 + 49b_3 + 7c_3 + d_3 &= 2.5 \end{aligned} \tag{4.92}$$

จากเงื่อนไขในสมการ (4.87) *และ* (4.88)

$$\begin{aligned} 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 &= 2.5 \\ 729a_3 + 81b_3 + 9c_3 + d_3 &= 0.5 \end{aligned} \tag{4.93}$$

จากเงื่อนไขในสมการ (4.89)

$$\begin{aligned} 13.5a_1 + 9b_1 + c_1 &= 13.5a_2 + 9b_2 + c_2 \\ 21a_2 + 14b_2 + c_2 &= 21a_3 + 14b_3 + c_3 \end{aligned} \tag{4.94}$$

จากเงื่อนไขในสมการ (4.90)

$$\begin{aligned} 27a_1 + 2b_1 &= 27a_2 + 2b_2 \\ 42a_2 + 2b_2 &= 42a_3 + 2b_3 \end{aligned} \tag{4.95}$$

และเงื่อนไขสุดท้ายจากสมการ (4.91) $a_1 = a_3 = 0$ *จะเห็นได้ว่าสมการทั้งหมด 12 สมการอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงเส้นที่สามารถคำนวณหาคำตอบได้เช่นเดียวกับตัวอย่างของการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนามด้วยฟังก์ชันควอดราติกที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น*

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงใช้ระเบียบวิธีถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Least-square regresssion) ฟิตเส้นตรงให้กับชุดข้อมูลต่อไปนี้

x	6	7	11	15	17	21	23	29	29	37	39
y	29	21	29	14	21	15	7	7	13	0	3

2. จงฟิตข้อมูลต่อไปนี้ด้วย กฎของกำลัง (Power law) ($y = ax^b$) และทำนายค่า y ที่ $x = 9$

x	2.5	3.5	5	6	7.5	10	12.5	15	17.5	20
y	13	11	8.5	8.2	7	6.2	5.2	4.8	4.6	4.3

3. จงใช้ ระเบียบวิธีถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด ฟิตเส้นตรงให้กับชุดข้อมูลต่อไปนี้

x_1	0	0	1	2	0	1	2	2	1
x_2	0	2	2	4	4	6	6	2	1
y	14	21	11	12	23	23	14	6	11

4. ข้อมูลจากการทดลองของแรงจากอากาศที่กระทำต่อวัตถุที่อยู่ในอุโมงค์ลมที่ความเร็วต่าง ๆ แสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้

v, m/s	10	20	30	40	50	60	70	80
F, N	25	70	380	550	610	1220	830	1450

จงฟิตความสัมพันธ์ของข้อมูลข้างต้นด้วยวิธี (ก) การถดถอยเชิงเส้น (ข) กฎของกำลัง และการแปลงรูปให้เป็นเชิงเส้น (ค) กฎของกำลัง และพล็อตกราฟเปรียบเทียบผลที่ได้

5. ผลของอุณหภูมิต่อความหนืดของของไหลสามารถแสดงได้ดังสมการ Andrade's equation

$$\mu = De^{B/T}$$

โดยที่ μ คือ ความหนืดของของไหล (Pa.s), T คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์ (K) ส่วน D และ B คือ ค่าคงที่ของสมการ ถ้าข้อมูลอุณหภูมิ และความหนืด มีค่าดังตารางต่อไปนี้

Temp ($^\circ C$)	0.0	4.4	10.0	15.6	21.1	26.7	32.2
μ (cP)	1.794	1.546	1.310	1.129	0.982	0.862	0.764

Temp ($^\circ C$)	37.8	48.9	60.0	71.1	82.2	93.3
μ (cP)	0.682	0.559	0.470	0.401	0.347	0.305

จงใช้ Andrade's equation ฟิตข้อมูลด้านบนและหาโมเดลที่เหมาะสมกับชุดข้อมูล หมายเหตุ cP คือ centipoise โดย 1 cP มีค่า 0.001 Pa.s, T(K) = T(C) +273.15

6. วัสดุชิ้นหนึ่งถูกทดสอบความล้า (fatigue) เมื่อได้รับความเค้น (MPa) และบันทึกจำนวนรอบ (number of cycle) ที่วัสดุเสียหายจากการล้าเอาไว้ด้วย ผลการบันทึกแสดงตามตารางดังนี้

Stress (MPa)	1	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
Cycles	1100	1000	925	800	625	550	420

จงพล็อตกราฟจากข้อมูลตารางด้านบนและฟิตข้อมูลดังกล่าวด้วยวิธีการ regression ที่เหมาะสม และทดสอบความเหมาะสมของโมเดลที่เลือกใช้ด้วย

7. ข้อมูลในตารางข้างล่างแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดของน้ำมัน SAE70 และอุณหภูมิ และสมการที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่าความหนืด และอุณหภูมิ คือ

$$\mu = b_0 e^{b_1/T}$$

เมื่อ μ คือ ความหนืด (Pa.s) และ T คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์ (K) จงใช้วิธี nonlinear regrssion เพื่อประมาณค่าตัวแปร b_0 และ b_1 และคำนวณค่า R^2 ทำการพล็อตกราฟเปรียบเทียบระหว่างข้อมูลในตาราง และค่าที่ได้จาก regression

Temp ($^\circ C$)	26.67	93.33	148.89	315.56
Viscosity (Pa.s)	1.35	0.085	0.012	0.00075

8. ข้อมูลข้างล่างนี้เป็นส่วนหนึ่งของข้อมูลจากตารางไอน้ำที่ปริมาตรจำเพาะ v (m^3/kg), และเอนโทรปี s (kJ/[kg.K]) ณ แรงดัน 200 Mpa

v (m^3/kg)	0.10377	0.11144	0.12547
s (kJ/[kg.K])	6.4147	6.5453	6.7664

   - จงประมาณค่าเอนโทรปีเมื่อ $v = 0.118$ โดยใช้ linear interpolation
   - จงประมาณค่าเอนโทรปีเมื่อ $v = 0.118$ ด้วยวิธี quadratic interpolation
   - จงประมาณปริมาตรจำเพาะเมื่อเอนโทรปีมีค่า 6.45 โดยใช้วิธี quadratic inverse interpolation

9. ข้อมูลความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของแก๊สไนโตรเจนและอุณหภูมิแสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้ จงใช้ first- ถึง fifth-order polynomials เพื่อประมาณค่าความหนาแน่นที่อุณหภูมิ 330 K และเลือกว่าค่าประมาณที่ดีที่สุดมีค่าเท่าไหร่

Temp (K)	200	250	300	350	400	450
Density (kg/m^3)	1.708	1.367	1.139	0.967	0.854	0.759

10. อุณหภูมิของแผ่นความร้อนรูปร่างสี่เหลี่ยมจตุรัสถูกวัด ณ ตำแหน่ง (x, y) ต่าง ๆ กันดังตารางต่อไปนี้ จงประมาณค่าอุณหภูมิที่ (ก) $x = 4$, $y = 3.2$ และ (ข) $x = 4.3$, $y = 2.7$

	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$	$x = 6$	$x = 8$
$y = 0$	100.00	90.00	80.00	70.00	60.00
$y = 2$	85.00	64.49	53.50	48.15	50.00
$y = 4$	70.00	48.90	38.43	35.03	40.00
$y = 6$	55.00	38.78	30.39	27.07	30.00
$y = 8$	40.00	35.00	30.00	25.00	20.00

11. จากข้อมูลที่ให้มาต่อไปนี้

x	1.6	2	2.5	3.2	4	4.5
$f(x)$	2	8	14	15	8	2

จงคำนวณหาค่า $f(2.8)$ ด้วยวิธี (ก) การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น (ข) การประมาณค่าในช่วงแบบพหุนามลำดับขั้น อันดับที่ 2 (ค) การประมาณค่าในช่วงแบบพหุนามลำดับขั้น อันดับที่ 3 และประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของผลที่คำนวณได้ จากวิธีทั้งสาม

12. ข้อมูลความเข้มข้นของออกซิเจนที่ละลายในน้ำทะเลที่อุณหภูมิต่าง ๆ แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

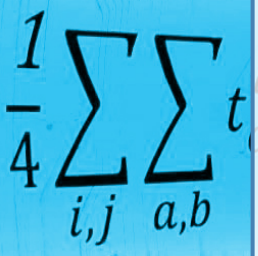
$T \deg C$	0	8	16	24	32	40
$f(T)$	14.621	11.843	9.870	8.418	7.305	6.413

จงคำนวณหา ปริมาณออกซิเจนที่ละลายในน้ำทะเลที่อุณหภูมิ 27 องศาเซลเซียส

13. จงคำนวณหาค่า อุณหภูมิ ที่ตำแหน่ง $x = 4, y = 3.2$ และ $x = 4.3, y = 2.7$ จากข้อมูลในตารางข้างล่างนี้

	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$	$x = 6$	$x = 8$
$y = 0$	100.00	90.00	80.00	70.00	60.00
$y = 2$	85.00	64.49	53.50	48.15	50.00
$y = 4$	70.00	48.90	38.43	35.03	40.00
$y = 6$	55.00	38.78	30.39	27.07	30.00
$y = 8$	40.00	35.00	30.00	25.00	20.00

5. การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration)



5.1	สูตรของนิวตัน-โคตส์ (Newton - cotes formulas)	123
5.2	กฎของซิมป์สัน (Simpson's rule)	130
5.3	การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน (Richardson's extrapolation)	140
5.4	การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ	144
5.5	การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขในสองและสามมิติ	146
	แบบฝึกหัดท้ายบท	149

บางครั้งงานด้านวิศวกรรมจะต้องมีการคำนวณหาค่าปริพันธ์ ซึ่งหากฟังก์ชันที่ต้องการคำนวณอยู่ในรูปที่ง่ายต่อการหาค่าปริพันธ์ เช่น ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล หรือฟังก์ชันในตรีโกณมิติก็จะสามารถคำนวณหาค่าปริพันธ์ได้โดยตรง แต่ถ้าฟังก์ชันมีความซับซ้อนหรือไม่สามารถจะหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีปกติได้ หรือในบางครั้งข้อมูลที่ต้องการหาค่าปริพันธ์ไม่ได้อยู่ในรูปของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์แต่อยู่ในรูปของข้อมูลตัวเลข เช่น ข้อมูลจากการทดลอง ในกรณีเช่นนี้ก็จะสามารถหาค่าปริพันธ์ได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

5.1 สูตรของนิวตัน-โคตส์ (Newton - cotes formulas)

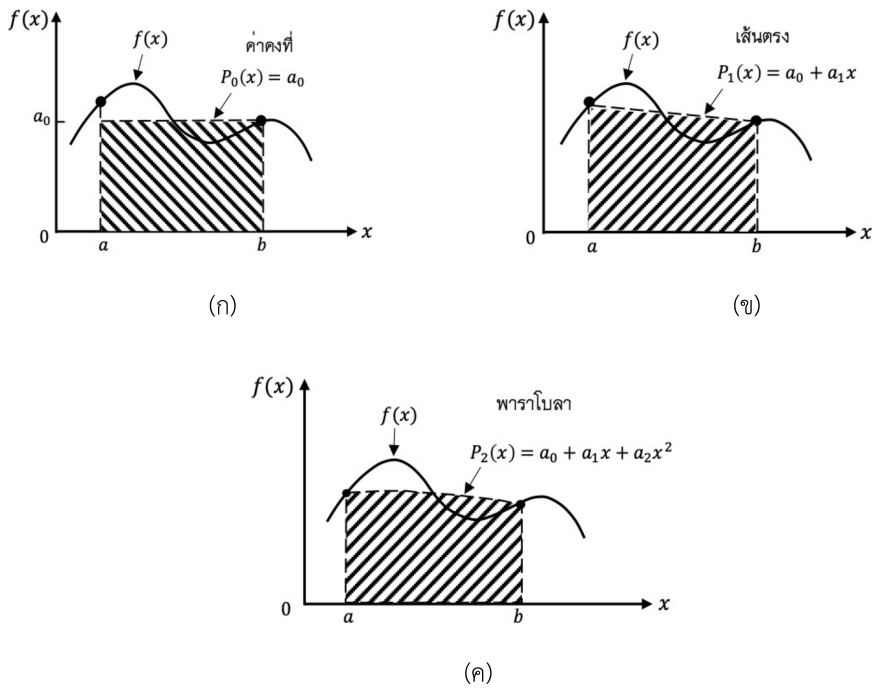
เป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุดในการหาค่าปริพันธ์ โดยจะอาศัยหลักการแทนที่ฟังก์ชันที่ซับซ้อนหรือชุดข้อมูลด้วยฟังก์ชันประมาณที่สามารถทำการอินทิเกรตได้ง่ายกว่า

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_m(x)dx \tag{5.1}$$

$p_m(x)$ เป็นฟังก์ชันประมาณ และ m^{th} คืออันดับของฟังก์ชันพหุนามที่มีรูปแบบสมการ ดังนี้

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{5.2}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ จะเป็นค่าคงที่ ๆ ทำให้ $f(x)$ และ $p_m(x)$ มีค่าเดียวกันหรือใกล้เคียงกันภายในช่วงที่ทำการหาค่าปริพันธ์ รูปที่ 5.1 แสดงการประมาณค่า $f(x)$ ด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ ศูนย์, หนึ่ง และ สอง ตามลำดับ



รูปที่ 5.1: การประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับต่าง ๆ (ก) ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ศูนย์ (ข) ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่หนึ่ง (ค) ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่สอง

5.1.1 กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular rule)

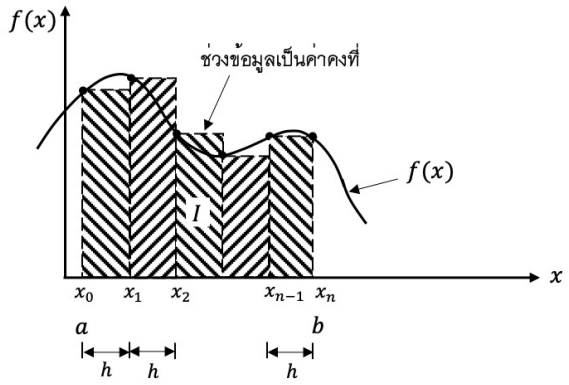
วิธีนี้จะใช้การประมาณฟังก์ชัน หรือข้อมูลที่ต้องการหาค่าปริพันธ์ด้วยฟังก์ชันพหุนามในช่วงสั้น ๆ ดังแสดงในรูป 5.2 โดยที่ช่วงของการหาค่าปริพันธ์ $a \le x \le b$ จะถูกแบ่งออกเป็น n ช่วง

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{5.3}$$

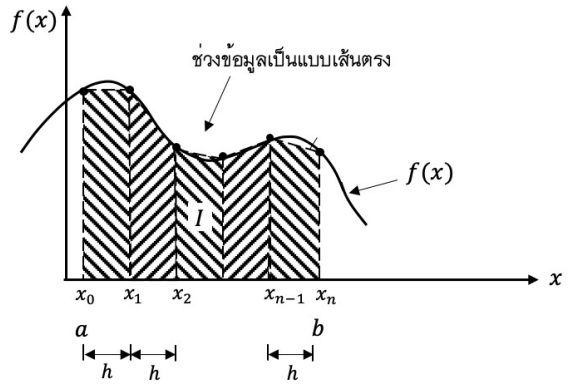
โดยที่จุดที่ถูกแบ่งในช่วงของการหาค่าปริพันธ์จะเขียนได้เป็น $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ และ $x_n = b$

$$x_i = a + ih; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{5.4}$$

ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ตำแหน่ง x_i จะเป็นค่าที่ทราบแล้วหรือสามารถหาค่าได้ จากรูปที่ 5.2 ฟังก์ชันประมาณค่าที่ง่ายที่สุด คือ ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ ศูนย์ หรือฟังก์ชันของค่าคงที่ และการกำหนดฟังก์ชันประมาณค่าดังกล่าวสามารถกำหนดตั้งแต่ช่วง $x_i \le x \le x_{i+1}$ โดยที่ฟังก์ชันจะใช้ค่า f_i หรือ $f_i + 1$ เป็นค่าประมาณก็ได้ ซึ่งค่าปริพันธ์ หรือ



(ก)



(ข)

รูปที่ 5.2: การประมาณค่า $f(x)$ ด้วย (ก) ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ศูนย์ และ (ข) ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่หนึ่ง

พื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ ในช่วงดังกล่าวจะสามารถคำนวณได้จาก

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right) \tag{5.5}$$

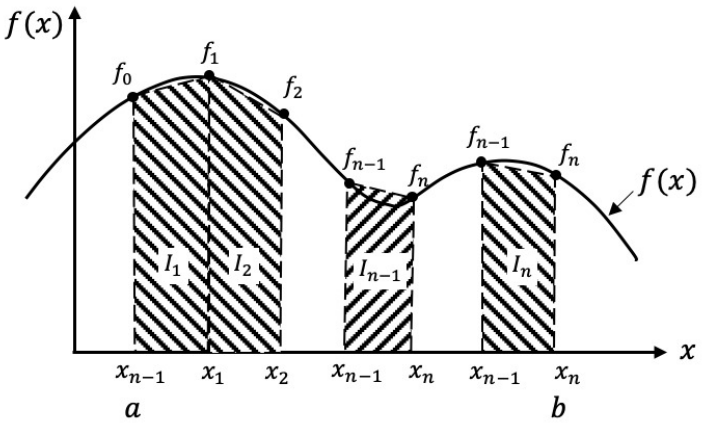
หรือถ้าหากใช้ค่า f_{i+1} เป็นค่าฟังก์ชันในการคำนวณหาค่าปริพันธ์ก็จะคำนวณได้จาก $f_{i+1}h$ ในช่วง $x_i \le x \le x_{i+1}$ ดังนั้น

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\sum_{i=0}^{n+1} f_{i+1}\right) \equiv \left(\sum_{i=0}^{n+1} f_i\right) \tag{5.6}$$

ในทางปฏิบัติแล้วหากฟังก์ชันหรือข้อมูลที่ทำการหาค่าปริพันธ์มีลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) วิธีกฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular rule) จะมีความคลาดเคลื่อนสูง วิธีนี้จึงไม่เป็นที่นิยมใช้มากนัก

5.1.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule)

วิธีนี้ใช้กันมากในงานวิศวกรรม เนื่องจากง่ายต่อการใช้งาน โดยมีหลักการประมาณค่าของฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์ด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับที่หนึ่ง หรือการใช้เส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดในช่วงที่กำลังคำนวณหาค่าปริพันธ์นั่นเอง ดังนั้น ค่าปริพันธ์ที่ได้จากวิธีนี้ก็คือพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู ในช่วง $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ดังแสดงในรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3: การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{f_0+f_1}{2}\right)h, I_2 = \left(\frac{f_1+f_2}{2}\right),\ldots, \\ I_i &= \left(\frac{f_{i-1}+f_i}{2}\right)h,\ldots, \text{และ } I_n = \left(\frac{f_{n-1}+f_n}{2}\right)h \end{aligned} \tag{5.7}$$

ค่าปริพันธ์รวม ก็คือ

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} I_i = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right) \tag{5.8}$$

Pseudocode 18 Trapezoidal rule (single–segment)

```
1: function TRAPEZOIDAL(h, f0, f1)
2:     res = h * (f0 + f1)/2
3: end function
```

Pseudocode 19 Trapezoidal rule (multiple–segment)

```
1: function TrapezoidalMul(h, n, f)
2:     sum = f_0
3:     for i = 1, n − 1 do
4:         sum = sum + 2 ∗ f_i
5:     end for
6:     sum = sum + f_n
7:     res = h ∗ sum/2
8: end function
```

5.1.3 ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error) ของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูนั้น สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$E = \int_a^b f(x)dx - \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right](b-a) \tag{5.9}$$

โดยที่เทอมแรกทางขวามือของสมการ (5.9) คือค่าคำตอบจริงของการหาค่าปริพันธ์ และเทอมที่สองคือค่าประมาณของค่าปริพันธ์ที่ได้จากวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู หากเราพิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดกึ่งกลางของช่วงการหาค่าปริพันธ์, $\bar{x} = (a+b)/2$

$$f(x) = f(\bar{x}) + yf'(\bar{x}) + \frac{y^2}{2!}f''(\bar{x}) + \ldots \tag{5.10}$$

ทำการหาค่าปริพันธ์ของสมการ (5.10) จะได้

$$\int_a^b f(x)dx = f(\bar{x}) \tag{5.11}$$

แทนค่า $x = a$ และ $x = b$ ลงในสมการ (5.11) จะได้

$$f(a) = f(\bar{x}) - \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\bar{x}) - \ldots \tag{5.12}$$

$$f(b) = f(\bar{x}) + \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\bar{x}) + \ldots \tag{5.13}$$

เนื่องจาก ค่า $x - \bar{x} = a - \bar{x} = (-h)/2$, $x - \bar{x} = b - \bar{x} = (+h)/2$ และ $(b-a) = h$ เพราะฉะนั้น เทอมที่สองทางขวามือของสมการ (5.9) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$(b-a)\left[\frac{f(a)-f(b)}{2}\right] = \frac{h}{2}[f(\bar{x})-\frac{h}{2}f'(\bar{x})+\frac{h^2}{8}f''(\bar{x})-\ldots \tag{5.14}$$

$$+f(\bar{x})+\frac{h}{2}f'(\bar{x})+\frac{h^2}{8}f''(\bar{x})+\cdots]$$

$$= hf(\bar{x})+\frac{h^3}{8}f''(\bar{x})+\cdots \tag{5.15}$$

แทนค่าสมการ (5.14) ลงในสมการ (5.9) จะได้ว่า

$$E = \left[hf(\bar{x})+\frac{h^3}{24}f''(\bar{x})+\cdots\right]-\left[hf(\bar{x})+\frac{h^3}{8}f''(\bar{x})+\cdots\right]$$

$$\approx -\frac{h^3}{12}f''(\bar{x}) \tag{5.16}$$

สมการ (5.16) แสดงให้เห็นว่าวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่าความคลาดเคลื่อนต่อหนึ่งช่วงย่อยของการหาค่าปริพันธ์เป็นอันดับของ h^3

$$E \approx -\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\sum_{i=1}^{n}f''(\bar{x}_i) \tag{5.17}$$

โดยที่ $\bar{x}_i$ เป็นค่ากึ่งกลางระหว่าง x_i และ x_{i+1} และ

$$\bar{f''} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f''(\bar{x}_i) \tag{5.18}$$

หากพิจารณาตลอดช่วงของการหาค่าปริพันธ์จะได้ว่า

$$E \approx -\frac{1}{12}(b-a)\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\bar{f''} = -\frac{1}{12}(b-a)h^2\bar{f''} = O(h^2) \tag{5.19}$$

สมการ (5.19) แสดงให้เห็นว่าความคลาดเคลื่อนรวมของวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูเป็นสัดส่วนของ h^2

ตัวอย่าง 5.1. *จงใช้วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูคำนวณหาค่าปริพันธ์, $I = \int_a^b f(x)dx$ ระหว่างค่า $a = 0.0$ และ $b = 1.5$ ของฟังก์ชันที่ให้มา ด้วยระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ (Step size) ต่าง ๆ*

$$f(x) = 0.84885406 + 31.51924706x - 137.66731262x^2 + 240.55831238x^3 - 171.45245361x^4 + 41.95066071x^5 \tag{E1}$$

วิธีทำ *ค่าปริพันธ์ของวิธี Trapezoid ที่ n ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ คือ*

$$I = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \tag{E2}$$

โดยที่ $h = (b-a)/n$ และ $f_i = f(x = a + ih)$ ถ้าเราใช้ ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ, n, เท่ากับ 3 จะได้ว่า

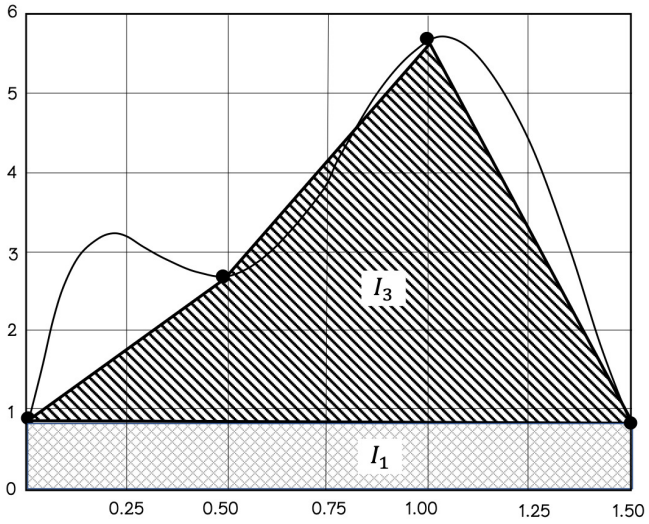
$$f_0 = 0.0 = 0.84885406, f_1 = f(a+h) = f(0.5) = 2.8566201,$$
$$f_2 = f(a+2h) = f(1.0) = 5.7573166; f_3 = f(a+3h) = f(1.5)0.84542847$$

$$I = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) = 4.7305388 \tag{E3}$$

ผลของค่าปริพันธ์ที่ได้จากการคำนวณที่ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ, n, ต่าง ๆ แสดงเป็นตารางได้ดังนี้

Number of Step	*Step Size*	*Integral Value*	*Percent Error*
(n)	(h)	(I)	
1	*1.5*	*1.2707119*	*77.148186*
2	*0.75*	*3.8171761*	*31.353920*
3	*0.5*	*4.7305388*	*14.928484*
4	*0.375*	*5.0828342*	*8.5929899*
5	*0.3*	*5.2516432*	*5.5572190*
6	*0.25*	*5.3448267*	*3.8814559*
9	*0.1666667*	*5.4640293*	*1.7377790*
12	*0.125*	*5.5061684*	*0.97997248*
15	*0.1*	*5.5257416*	*0.62797815*
ผลเฉลยจริง คือ: 5.5606613			

รูปที่ 5.4 แสดงพื้นที่ใต้กราฟที่เป็นค่าปริพันธ์ที่ได้จากการคำนวณที่ $n = 1$ และ $n = 3$ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงผลของความแตกต่างระหว่างการเลือกใช้ช่วงของการคำนวณ (ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ)



รูปที่ 5.4: ตัวอย่างเปรียบเทียบค่าปริพันธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วย $n = 1$ และ $n = 3$

5.2 กฎของซิมป์สัน (Simpson's rule)

ความถูกต้องของวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูสามารถเพิ่มได้ด้วยการลดค่าระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ (h) อย่างไรก็ตามหากการลดระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ จะทำให้ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Round - off error) สูงขึ้น ดังนั้นการเพิ่มอันดับของฟังก์ชันประมาณจึงเป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถเพิ่มความถูกต้องให้กับการหาค่าปริพันธ์ได้ยกตัวอย่างเช่น ใช้ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันควอดราติกในการประมาณค่า $f(x)$ ซึ่งเทียบเท่ากับ $m = 2$ ในวิธีของนิวตัน-โคต (รูปที่ 5.1) วิธีนี้มีชื่อว่ากฎของซิมป์สัน 1/3 (Simpson's one – third rule) นอกจากนั้นยังสามารถใช้ฟังก์ชันคิวบิก หรือสมการพหุนามอันดับที่สามในการประมาณค่า $f(x)$ วิธีนี้เรียกว่ากฎของซิมป์สัน 3/8 (Simpson's three – eighths rule)

5.2.1 กฎของซิมป์สัน 1/3 (Simpson's one - third rule)

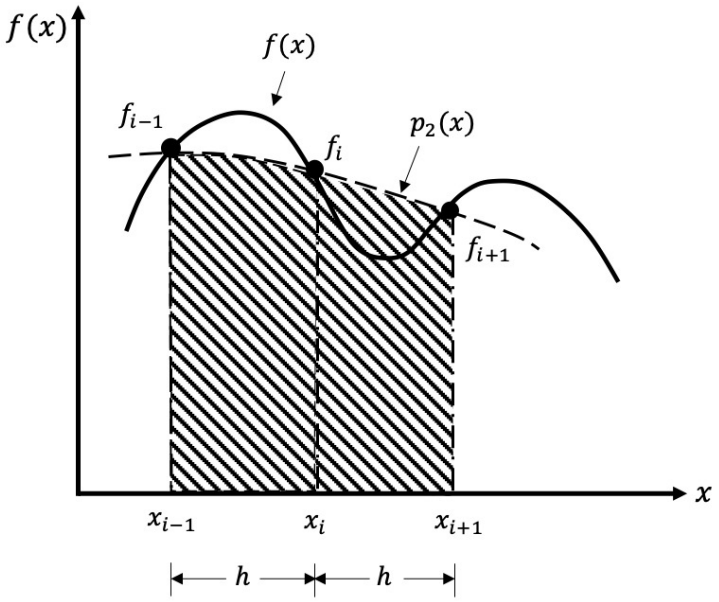
พิจารณาการคำนวณหาค่าปริพันธ์

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{5.20}$$

หากเราใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับที่สองในการประมาณค่าของ $f(x)$

$$p_2(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0 \tag{5.21}$$

จากรูป 5.5 แสดงให้เห็นการหาค่าปริพันธ์โดยใช้ฟังก์ชันประมาณจากสมการ (5.21) ในช่วง x_{i-1} ถึง x_{i+1} โดยที่ค่า c_0,



รูปที่ 5.5: การคำนวณหาค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3

c_1 และ c_2 คือค่าคงที่ และสามารถคำนวณได้จาก ตำแหน่ง x_{i-1} ถึง x_{i+1} ดังนี้

ที่ตำแหน่ง x_{i-1}

$$p_2(x=-h) = f_{i-1} = c_2(-h)^2 + c_1(-h) + c_0 = c_2h^2 - c_1h + c_0 \tag{5.22}$$

ที่ตำแหน่ง x_i

$$p_2(x=0) = f_i = c_2(0)^2 + c_1(0) + c_0 = c_0 \tag{5.23}$$

ที่ตำแหน่ง x_{i+1}

$$p_2(x=h) = f_{i+1} = c_2(h)^2 + c_1(h) + c_0 = c_2h^2 + c_1h + c_0 \tag{5.24}$$

จากสมการ (5.22) ถึง (5.24) จะได้ค่าคงที่ ดังนี้

$$c_2 = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2}, c_1 = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \text{ และ } c_0 = f_i \tag{5.25}$$

ดังนั้นค่าปริพันธ์สามารถแสดงได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p_2(x)dx = \int_{-h}^{h} \left(c_2x^2 + c_1x + c_0\right)dx \\ &= \frac{2}{3}c_2h^3 + 2c_0h\end{aligned} \tag{5.26}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ c_2 และ c_0 ลงในสมการ (5.26) จะได้

$$\bar{I} = \frac{2}{3}h^3\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2} + 2hf_i = \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right) \tag{5.27}$$

เทอม "1/3" ในชื่อ Simpson's one-third rule คือค่าคงที่ $\frac{1}{3}$ ในสมการ (5.27) นั่นเอง สังเกตว่าค่าปริพันธ์ที่แสดงในสมการ (5.27) นั้น เป็นค่าปริพันธ์ที่ได้จาก 2 ช่วงย่อย ดังนั้นหากเราแบ่งช่วงของการ อินทิเกรตเป็น n ช่วง ผลรวมของค่าปริพันธ์ดังแสดงในสมการ (5.20) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\bar{I} = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n/2}(\bar{I})_j \tag{5.28}$$

โดยที่ $(\bar{I})_j$ คือค่าปริพันธ์ที่คำนวณได้ในคู่ของช่วงการหาค่าปริพันธ์ย่อยลำดับที่ j-th และดัชนี i ในสมการ (5.27) คือ $i = 2j - 1$ สมการ (5.27) และ สมการ (5.28) จะสามารถเขียนใหม่ได้

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f_i + 2 + 2\sum_{i=2,4,6,\ldots}^{n-2} f_i + f_n\right] \tag{5.29}$$

และช่วงการแบ่งจะต้องหารด้วย 2 ลงตัว

ตัวอย่าง 5.2. *จงหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ตั้งแต่ 0.0 ถึง 1.5 ด้วยวิธีซิมป์สัน1/3*

$$\begin{aligned}f(x) =& 0.84885406 + 31.51924706x - 137.66731262x^2 \\ &+ 240.55831238x^3 - 171.45245361x^4 + 41.95066071x^5\end{aligned} \tag{E1}$$

วิธีทำ *จากสมการของซิมป์สัน 1/3 ที่ช่วงการหาค่าปริพันธ์ n ช่วง*

$$I = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f_i + 2 + 2\sum_{i=2,4,6,\ldots}^{n-2} f_i + f_n\right] \tag{E2}$$

สำหรับ $n = 2$ *และ* $h = 0.75$ *จะได้ว่า*

$$I = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] \tag{E3}$$

โดยที่ $f_0 = 0.84885406$, $f_1 = f(0.75) = 4.2424269$, *และ* $f_2 = f(1.5) = 0.84542847$ *จะได้ผลลัพธ์ของการหาค่าปริพันธ์เท่ากับ* $I = 4.66599753$ *เนื่องจากคำตอบแท้จริงของค่าปริพันธ์เท่ากับ* ***5.56066613*** *เพราะฉะนั้นความคลาดเคลื่อนของวิธีซิมป์สัน* ***1/3*** *ที่* $n = 2$ *คือ* ***23.7064321%***

ที่ $n = 2$ *และ* $h = 0.375$ *สมการ* (E1) *สามารถเขียนได้ว่า*

$$I = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4] \tag{E4}$$

โดยที่ $f_0 = 0.84885406$, $f_1 = f(0.375) = 2.9153550$, $f_2 = f(0.75) = 4.2424269$, $f_3 = f(1.125) = 5.5493011$ *และ* $f_4 = f(1.5) = 0.84542847$ *จะได้ผลลัพธ์ของการหาค่าปริพันธ์เท่ากับ* $I = 5.50472009$ *มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ* ***1.0060172%*** *ผลของการหาค่าปริพันธ์ที่แต่ละช่วง* n *แสดงได้ดังตาราง*

Number of Step	*Step Size*	*Integral Value*	*Percent Error*
(n)	(h)	(I)	
2	*0.75*	*4.6659975*	*16.089163*
4	*0.375*	*5.047202*	*1.0060153*
6	*0.25*	*5.5493011*	*0.19911586*
8	*0.1875*	*5.5571246*	*0.063602172*
10	*0.15*	*5.5592151*	*0.026008544*
12	*0.125*	*5.5599494*	*0.012802755*
14	*0.10714286*	*5.5602551*	*0.0073060603*
16	*0.09375*	*5.5604043*	*0.0046220263*
คำตอบจริงมีค่าเท่ากับ: ***5.5606613***			

Pseudocode 20 Simpson's one – third rule (single–segment)

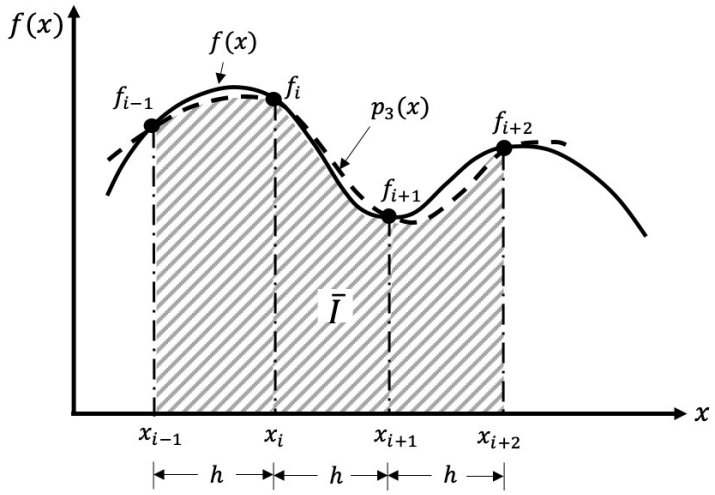
```
function SIMPSON13(h, f_0, f_1, f_2)
    res = 2 * h * (f_0 + 4 * f_1 + f_2)/6
end function
```

Pseudocode 21 Simpson's one – third rule (multiple–segment)

```
function SIMPSON13MUL(h, n, f)
    sum = f_0
    for i = 1, n − 2, 2 do
        sum = sum + 4 * f_i + 2 * f_{i+1}
    end for
    sum = sum + 4 * f_{n−1} + f_n
    res = h * sum/3
end function
```

5.2.2 กฎของซิมป์สัน 3/8 (Simpon's three – eighth's rule)

ในการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีนี้จะประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยสมการพหุนามอันดับที่สาม , $p_3(x)$ ดังแสดงในรูป 5.6



รูปที่ 5.6: การหาค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมป์สัน 3/8

ค่าสัมประสิทธิ์ c_0, c_1, c_2 และ c_3 สามารถคำนวณได้จากตำแหน่งย่อยในช่วงการหาค่าปริพันธ์จำนวน 4 ตำแหน่ง (x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) และ (x_{i+2}, f_{i+2}) ดังนี้

ที่ (x_{i-1}, f_{i-1})

$$p_3(x = -h) = f_{i-1} = -h^3 c_3 + h^2 c_2 - h c_1 + c_0 \tag{5.30}$$

ที่ (x_i, f_i)

$$p_3(x=0) = f_i = c_0 \tag{5.31}$$

ที่ (x_{i+1}, f_{i+1})

$$p_3(x=h) = f_{i+1} = h^3c_3 + h^2c_2 + hc_1 + c_0 \tag{5.32}$$

ที่ (x_{i+2}, f_{i+2})

$$p_3(x=2h) = f_{i+2} = 8h^3c_3 + 4h^2c_2 + 2hc_1 + c_0 \tag{5.33}$$

ผลการคำนวณจากสมการ (5.30) ถึง สมการ (5.33) จะได้

$$c_0 = f_1 \tag{5.34}$$

$$c_1 = \frac{1}{6h}(-f_{i+2} + 6f_{i+1} - 3f_i - 2f_{i-1}) \tag{5.35}$$

$$c_2 = \frac{1}{2h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) \tag{5.36}$$

$$c_3 = \frac{1}{6h^3}(f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}) \tag{5.37}$$

พื้นที่ที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์ $\bar{I}$ ตั้งแต่ช่วง x_{i-1} ถึง x_{i+2}

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} p_3(x)dx = \int_{-h}^{2h} \left(c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0\right)dx \\ &= \frac{c_3}{4}(x^4)|_{-h}^{2h} + \frac{c_2}{3}(x^3)|_{-h}^{2h} + \frac{c_1}{2}(x^2)|_{-h}^{2h} + c_0(x)|_{-h}^{2h} \\ &= \frac{c_3}{4}(15h^4) + \frac{c_2}{3}(9h^3) + \frac{c_1}{2}(3h^2) + c_0(3h)\end{aligned} \tag{5.38}$$

แทนค่า c_0 ถึง c_3 ลงในสมการ (5.38) จะได้

$$\begin{aligned}\bar{I} =& \frac{15h^4}{4}\left(\frac{f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}}{6h^3}\right) + 3h^3\left(\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}\right) \\ &+ \frac{3h^2}{2}\left(\frac{-f_{i+2} + 6f_{i+1} - 3f_i - 2f_{i-1}}{6h}\right) + 3hf_i \\ =& \frac{3h}{8}\left[f_{i+2} + 3f_{i+1} + 3f_i + f_{i-1}\right]\end{aligned} \tag{5.39}$$

เทอม "$\frac{3}{8}$" ในวิธีซิมป์สัน 3/8 มาจากค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (5.39) หากเราต้องการแบ่งช่วงของการหาค่าปริพันธ์ $a \leq$

$x \leq b$ ออกเป็น n ช่วง จะต้องแบ่งให้ช่วงการหาค่าปริพันธ์นี้หารด้วย 3 ลงตัว จึงจะใช้วิธีนี้ได้ เนื่องจาก

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n/3} \left(\bar{I}\right)_j \tag{5.40}$$

โดยที่ $\left(\bar{I}\right)_j$ คือค่าปริพันธ์ที่คำนวณได้จากช่วงการหาค่าปริพันธ์ที่ j–th ที่ได้จากสมการที่ (5.39) จากสมการ (5.39) และสมการ (5.40) จะได้สมการ (5.41)

$$I \approx \frac{3}{8}\left[f_0 + 3\sum_{i=1,4,7,\ldots}^{n-2}(f_i + f_{i+1}) + 2\sum_{i=3,6,9,\ldots}^{n-3} f_i + f_n\right] \tag{5.41}$$

ความคลาดเคลื่อนของสมการ (5.39) มีอันดับเดียวกับวิธีซิมป์สัน 1/3 แต่ต้องใช้ช่วงการหาค่าปริพันธ์ย่อยถึง 3 ช่วง ทำให้วิธีนี้ไม่เป็นที่นิยมใช้มากนัก อย่างไรก็ตามวิธีซิมป์สัน 3/8 และวิธีซิมป์สัน 1/3 สามารถนำมาใช้ร่วมกันได้และทำให้ข้อจำกัดของการแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์หมดไป

Pseudocode 22 Simpson's three – eight rule (single–segment)

```
1: function SIMPSON38(h, f0, f1, f2, f3)
2:     res = 3 * h * (f0 + 3 * (f1 + f2) + f3)/8
3: end function
```

Pseudocode 23 Simpson's three – eight rule (multiple–segment)

```
1: function SIMPSON13MUL(a, b, n, f)
2:     h = (b − a)/n
3:     if n = 1 then
4:         sum = TRAPEZOIDAL(h, f_{n−1}, f_n)
5:     else
6:         m = n
7:         odd = (n/2) − INT(n/2)
8:         if odd > 0 and n > 1 then
9:             sum = sum+SIMPSON38(h, f_{n−3}, f_{n−2}, f_{n−1}, f_n)
10:            m = n − 3
11:        end if
12:        if m > 1 then
13:            sum = sum+SIMPSON13(h, m, f)
14:        end if
15:    end if
16:    res = sum
17: end function
```

ตัวอย่าง 5.3. *จงคำนวณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้กฎของซิมป์สัน 3/8 ระหว่าง a=0.0 ถึง b=1.5 ด้วยช่วง n ต่าง ๆ*

$$f(x) = 0.84885406 + 31.51924706x - 137.66731262x^2 + 240.55831238x^3 - 171.45245361x^4 + 41.95066071x^5 \tag{E1}$$

วิธีทำ

ที่ n=5 และ h=0.5 สมการ (5.41) *คือ*

$$I = \frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] \tag{E2}$$

โดยที่ $f_0 = f(0.0) = 0.84885406$, $f_1 = f(0.5) = 2.8566201$, $f_2 = f(1.0) = 5.7573166$, *และ* $f_3 = f(1.5) = 0.84542847$ *ดังนั้น ผลลัพธ์ของการหาค่าปริพันธ์เท่ากับ* $I = 5.16301737$ *มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ* ***7.1510187%*** *ค่าของปริพันธ์ที่คำนวณได้จากการแบ่งช่วงการอินทิเกรตต่าง ๆ แสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้*

Number of Step	*Step Size*	*Integral Value*	*Percent Error*
(n)	(h)	(I)	*(%)*
3	*0.5*	*5.1630173*	*7.1510205*
6	*0.25*	*5.5357828*	*0.44740185*
9	*0.166667*	*5.5557156*	*0.088941850*
12	*0.125*	*5.5590858*	*0.028332422*
15	*0.1*	*5.5600042*	*0.011816609*
18	*0.08333*	*5.5603180*	*0.0061741355*
21	*0.0714286*	*5.5604572*	*0.003670180*
24	*0.0625*	*5.5605288*	*0.0023839022*
คำตอบจริงมีค่าเท่ากับ: 5.5606613			

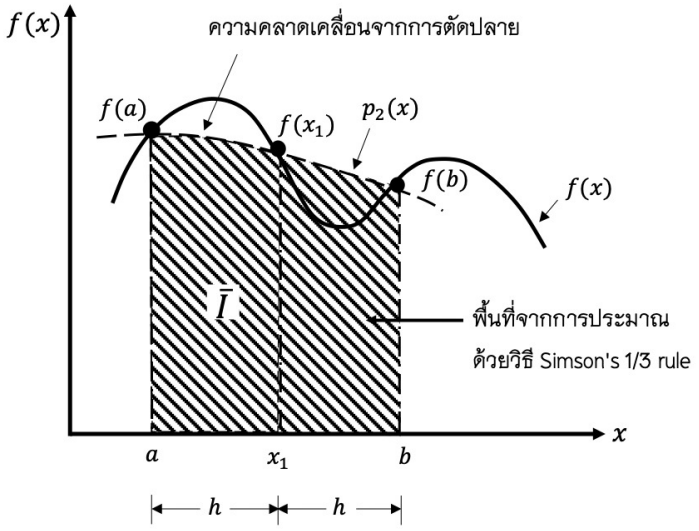
5.2.3 ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error) ของกฎของซิมป์สัน

ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีซิมป์สัน 1/3 เขียนได้ ดังนี้

$$E = \int_a^b f(x)dx - \left(\frac{b-a}{6}\right)[f(a) + 4f(x_1) + f(b)] \tag{5.42}$$

พิจารณาความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายดังแสดงในรูปที่ 5.7 และใช้อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_1 จะได้ว่า

$$f(x) = f(x_1) + yf'(x_1) + \frac{y^2}{2!}f''(x_1) + \frac{y^3}{3!}f'''(x_1) + \frac{y^4}{4!}f''''(x_1) + \frac{y^5}{5!}f'''''(x_1) + \cdots, \tag{5.43}$$



รูปที่ 5.7: ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของกฎของซิมป์สัน

และปริพันธ์ของ $f(x)$ คือ

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx =& f(x_1)(y)\Big|_{-h}^{h} + f'(x_1)\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-h}^{h} + f''(x_1)\left(\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-h}^{h} \\ &+ f'''(x_1)\left(\frac{y^4}{24}\right)\Big|_{-h}^{h} + f''''(x_1)\left(\frac{y^5}{120}\right)\Big|_{-h}^{h} + f'''''(x_1)\left(\frac{y^6}{720}\right)\Big|_{-h}^{h} + \cdots, \\ =& 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{h^5}{60}f''''(x_1) + \cdots\end{aligned} \tag{5.44}$$

แทนค่า $x = a(y = -h)$, $x = x_1(y = 0)$, และ $x = b(y = h)$ จะได้

$$\begin{aligned}E \approx& \left[2\left(\frac{b-a}{2}\right)f(x_1) + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 f''(x_1) + \frac{1}{60}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f''''(x_1)\right] \\ &- \left[(b-a)f(x_1) + \left(\frac{b-a}{6}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(x_1) + \left(\frac{b-a}{6}\right)\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f''''(x_1)\right] \\ \approx& -\frac{1}{2880}(b-a)^5 f''''(x_1) \\ \approx& -\frac{1}{90}(h)^5 f''''(x_1)\end{aligned} \tag{5.45}$$

สมการ (5.45) แสดงเห็นได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีซิมป์สัน 1/3 ต่อช่วงย่อยของการหาค่าปริพันธ์มีอันดับเท่ากับ h^5 ดังนั้นความคลาดเคลื่อนรวมของวิธีซิมป์สัน 1/3 รวมตลอดช่วงทั้งหมดของการหาค่าปริพันธ์จะเป็นอันดับ

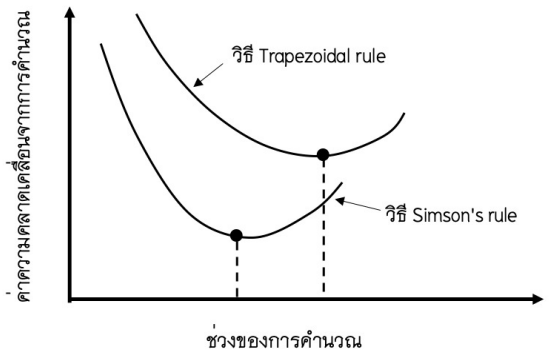
ของ h^4

$$\begin{aligned} E &\approx -\frac{1}{90}(h)^5 \frac{n}{2} f^{\bar{\prime}\prime\prime\prime} \\ &\approx -\frac{1}{180}(h)^4 (b-a) f^{\bar{\prime}\prime\prime\prime} \\ &= O(h^4) \end{aligned} \tag{5.46}$$

และเนื่องจากวิธีซิมป์สัน 3/8 มีความคลาดเคลื่อนอันดับเดียวกับวิธีซิมป์สัน 1/3 ดังนั้นจึงมีความคลาดเคลื่อนอยู่ในอันดับ h^4 ด้วยเช่นกัน

5.3 การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน (Richardson's extrapolation)

จากการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข เราสามาถเพิ่มความถูกต้องได้ด้วยการเพิ่มจำนวนช่วงย่อย n ของการหาปริพันธ์ อย่างไรก็ตามหากเพิ่มจำนวนช่วงการหาค่าปริพันธ์ถึงจำนวนหนึ่ง ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษจะเพิ่มมากขึ้น และทำให้ความถูกต้องลดลง ดังแสดงในรูป 5.8



รูปที่ 5.8: ความสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อนของผลการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขต่อจำนวนช่วงการหาค่าปริพันธ์ที่เพิ่มขึ้น

นอกจากนั้นจำนวนการคำนวณก็จะเพิ่มมากขึ้นตามจำนวนช่วงที่แบ่งอีกด้วย วิธีการปรับปรุงความถูกต้องสามารถทำได้โดยการใช้วิธีนิวตัน–โคต ที่ใช้ฟังก์ชันประมาณเป็นฟังก์ชันพหุนามอันดับสูงขึ้น นอกจากนั้นแล้วยังมีระเบียบวิธีประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขมาคำนวณเพื่อให้ได้ผลการหาค่าปริพันธ์ที่แม่นยำขึ้น

5.3.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

พิจารณาความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูจะได้ว่า

$$E \approx -\frac{1}{12}(b-a)(h)^2 \bar{f''} \tag{5.47}$$

ถ้า $I_1(h_1)$ เป็นค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์ และ $E_1(h_1)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนจากการหาค่าปริพันธ์ที่ช่วงการหาค่าปริพันธ์ย่อยของแต่ละจุดการคำนวณเท่ากับ h_1 คำตอบจริงของการหาค่าปริพันธ์สามารถแสดงได้ ดังนี้

$$I \approx I_1(h_1) + E_1(h_1) \approx I_1(h_1) + ch_1^2 \tag{5.48}$$

โดยที่ $c = (-1/12)(b-a)\bar{f''}$ เป็นค่าคงที่ ในลักษณะเดียวกัน $I_2(h_2)$ เป็นค่าปริพันธ์ที่ได้จากช่วงการหาค่าปริพันธ์ย่อยของแต่ละจุดการคำนวณเท่ากับ h_2 และ $E_2(h_2)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อน เราสามารถแสดงได้ว่า

$$I \approx I_2(h_2) + E_2(h_2) \approx I_2(h_2) + ch_2^2 \tag{5.49}$$

หากค่า $\bar{f''}$ เป็นค่าคงที่ ๆ ไม่ขึ้นกับระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ จากสมการ (5.48) และ สมการ (5.49) จะได้ว่า

$$I_1(h_1) + ch_1^2 = I_2(h_2) + ch_2^2$$

หรือ

$$c \approx \frac{I_2(h_2) - I_1(h_1)}{h_1^2 - h_2^2} \tag{5.50}$$

แทนค่า c ลงในสมการ (5.49) จะได้ว่าค่าปริพันธ์ที่มีความถูกต้องมากขึ้นสามารถคำนวณได้จาก

$$I \approx I_2(h_2) + \frac{I_2(h_2) - I_1(h_1)}{\left\{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1\right\}} \tag{5.51}$$

ถ้า $h_2 = \frac{h_1}{2}$ สมการ (5.51) จะเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} I &\approx I_2(h_2) + \frac{I_2(h_2) - I_1(h_1)}{3} \\ &\approx \frac{4}{3}I_2(h_2) - \frac{1}{3}I_1(h_1) \end{aligned} \tag{5.52}$$

เนื่องจากความคลาดเคลื่อนของวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูเป็นอันดับของ $O(h^2)$ ดังนั้นค่าประมาณใหม่จากระเบียบวิธีประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันจะมีความคลาดเคลื่อนเป็นอันดับของ $O(h^4)$

ตัวอย่าง 5.4. *ใช้ผลการคำนวณของการใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู จากตารางข้างล่างนี้ ในการคำนวณหาค่าปริพันธ์ที่ดีกว่า โดยใช้ระเบียบวิธีประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน*

Number of Step	*Step Size*	*Integral Value*	*Percent Error*
(n)	(h)	(I)	
1	*1.5*	*1.2707119*	*77.148186*
2	*0.75*	*3.8171761*	*31.353920*
3	*0.5*	*4.7305388*	*14.928484*
4	*0.375*	*5.0828342*	*8.5929899*
5	*0.3*	*5.2516432*	*5.5572190*
6	*0.25*	*5.3448267*	*3.8814559*
9	*0.1666667*	*5.4640293*	*1.7377790*
12	*0.125*	*5.5061684*	*0.97997248*
15	*0.1*	*5.5257416*	*0.62797815*
*คำตอบจริงมีค่าเท่ากับ: **5.5606613***			

วิธีทำ *ที่* $h_1 = 1.5$, $I_1 = 1.2707119$, $h_2 = 0.75$ *และ* $I = 3.8171761$ *จะได้ว่า*

$$I = \frac{4}{3}(3.8171761) - \frac{1}{3}(1.2707119) = 4.66599750$$

*ซึ่งผลการคำนวณข้างต้นมีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ **16.0891619%** ถ้าใช้* $h_1 = 0.5$, $I_1 = 4.7305388$, $h_2 = 0.375$ *และ* $I = 5.0828342$ *จะได้*

$$I = \frac{4}{3}(5.0828342) - \frac{1}{3}(4.7305388) = 5.20026600$$

*ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ **6.48115899%***

5.3.2 กฎซิมป์สัน 1/3

ความคลาดเคลื่อนของวิธีของซิมป์สัน 1/3 คือ

$$E \approx -\frac{1}{180}(b-a)(h)^4 f^{\bar{}''''} \tag{5.53}$$

ถ้า $I_1(h_1)$ และ $I_2(h_2)$ คือค่าที่อินทิเกรตได้จากช่วงย่อยของการหาค่าปริพันธ์แต่ละช่วงการคำนวณ h_1 และ h_2 ตามลำดับ และความคลาดเคลื่อนที่ประมาณได้จากการหาค่าปริพันธ์ คือ $E_1(h_1)$ และ $E_2(h_2)$ จะได้

$$I \approx I_1(h_1) + E_1(h_1) \approx I_1(h_1) + ch_1^4 \tag{5.54}$$

และ

$$I \approx I_2(h_2) + E_2(h_2) \approx I_2(h_2) + ch_2^4 \tag{5.55}$$

จากสมการข้างต้นจะทำให้ได้สมการ

$$c \approx \frac{I_2(h_2) - I_1(h_1)}{h_1^4 - h_2^4} \tag{5.56}$$

แทนค่าลงในสมการ (5.55) จะได้ค่าปริพันธ์ที่ดีขึ้น ดังนี้

$$I \approx I_2(h_2) + \frac{I_2(h_2) - I_1(h_1)}{\left\{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^4 - 1\right\}} \tag{5.57}$$

ถ้า $h_2 = (h_1/2)$ สมการ (5.57) จะเขียนได้ว่า

$$I \approx \frac{16}{15} I_2(h_2) - \frac{1}{15} I_1(h_1) \tag{5.58}$$

5.4 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

การหาค่าปริพันธ์ที่ผ่านมาจะใช้กับการหาค่าปริพันธ์ที่มีช่วงของการหาค่าปริพันธ์ที่แน่นอน (Finite integration) หากต้องการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีช่วงของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ หรือเกิดสภาวะเอกฐาน (Singularities) ภายในฟังก์ชันก็จะต้องใช้วิธีดังต่อไปนี้

5.4.1 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่มีลิมิตอนันต์ (Numerial integration with infinite limits)

การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีช่วงการหาค่าปริพันธ์เป็นอนันต์ เช่น

$$I_1 = \int_a^{\infty} f(x)dx \tag{5.59}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \tag{5.60}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{5.61}$$

ก็จะสามารถนำเอาวิธีการหาค่าปริพันธ์แบบกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมาใช้ได้ โดยการแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์เป็น n ช่วง โดยที่ n เป็นตัวเลขจำนวนเต็มที่มีค่ามาก ๆ และ $f_i = f(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i = a + (i-1)h$ และ h คือ ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ ของการหาค่าปริพันธ์

$$I_1 = \int_a^{\infty} f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f_i \tag{5.62}$$

ลักษณะเดียวกันถ้าฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์เป็น

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \approx h\sum_{i=-n}^{n} f_i \tag{5.63}$$

และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามาก ๆ และ h คือ ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ และ $f_i = f(x_i)$ โดยที่

$$x_i = ih; i = -n, -(n-1), -(n-2), \ldots, 1, 0, 1, 2, \ldots, (n-1), n \tag{5.64}$$

ในทางปฏิบัติแล้ว จำนวนค่าของ n จะเป็นจำนวนที่ไม่รู้ค่า วิธีนี้ใช้ในการกำหนดก็คือการทดลองเพิ่มค่าของ n แล้วทำการหาค่าปริพันธ์ซ้ำไปจนกว่าค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์เปลี่ยนแปลงน้อยจากค่าเดิมน้อยมาก จึงจะถือว่าค่า n

นั้นเป็นค่าที่เหมาะสม

5.4.2 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่มีความเป็นสภาวะเอกฐาน (Numerical integration with singularities)

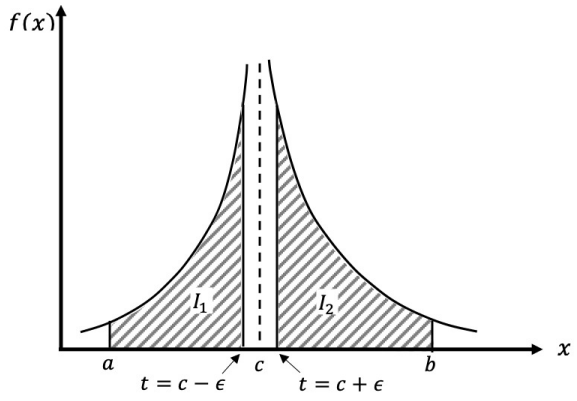
ในบางกรณีฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์จะเป็นสภาวะเอกฐาน (Singular, หาค่าไม่ได้) ณ จุดใด จุดหนึ่งในช่วงของการหาค่าปริพันธ์ เช่น

$$I_1 = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \tag{5.65}$$

$$I_1 = \int_0^{-2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \tag{5.66}$$

$$I_1 = \int_{-2}^{26} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} dx \tag{5.67}$$

โดยทั่วไปแล้ว หากฟังก์ชันมีค่าเป็นสภาวะเอกฐาน ณ ตำแหน่ง c ในช่วงของการหาค่าปริพันธ์จาก a ถึง b ดังแสดงในรูป 5.9



รูปที่ 5.9: การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันที่เป็นเอกฐาน (Singular)

การหาค่าปริพันธ์จะสามารถทำได้ ดังแสดงในสมการ (5.68)

$$\begin{aligned} I_1 = \int_a^b f(x)dx = I_1 + I_2 \equiv \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx \end{aligned} \tag{5.68}$$

โดยที่ค่าลิมิต t เป็นค่าที่ใกล้กับค่า c มาก ๆ โดยมีระยะห่างจาก ค่า c เท่ากับ $t \to c^- = t \to c^+ = (c-t) = \epsilon$ การเลือก

ค่า ϵ ก็สามารถทำได้โดยการคำนวณซ้ำแล้วลดค่า ϵ ลงเรื่อย ๆ จนกว่าค่าปริพันธ์ที่ได้เปลี่ยนแปลงจากค่าเดิมน้อยมาก ก็จะถือว่าค่า ϵ นั้นเป็นค่าที่เหมาะสม

นอกจากวิธีข้างต้นแล้วบางกรณีวิธีการหาค่าปริพันธ์ที่ละส่วนจะช่วยหลีกเลี่ยงการเกิดความเป็นสภาวะเอกฐานได้ เช่น

$$I = \int_0^5 \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{2x}\sqrt{x}\Big|_0^5 - \int_0^5 4\sqrt{x}e^{2x} \tag{5.69}$$

หรืออาจจะใช้วิธีเปลี่ยนแปลงตัวแปร (Transformation of variable) ก็ได้ เช่น

$$I = \int_0^1 \frac{1 + x^3 + x^5}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \tag{5.70}$$

หากเปลี่ยนตัวแปรเป็น $x = \sin y$ หรือ $dx = \cos y dy$ ก็จะได้ว่า $\sqrt{x^2 - 1} = \cos y$ ซึ่งจะทำให้ สมการ (5.70) อยู่ในรูป

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^3 y + \sin^5 y) dy \tag{5.71}$$

ซึ่งจะไม่ทำให้เกิดความเป็นสภาวะเอกฐาน

5.5 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขในสองและสามมิติ

บางครั้งหากต้องการทำการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันสองหรือสามมิติ ดังแสดงในรูป 5.10

ซึ่งจะมีรูปของสมการ ดังนี้

$$I = \int\int_A f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y) dy \right\} dx \tag{5.72}$$

สมการ (5.72) สามารถเขียนในอีกรูปหนึ่งได้ว่า

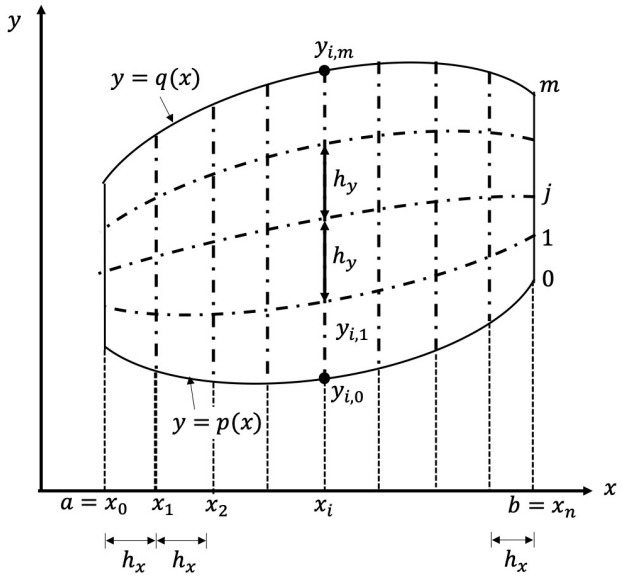
$$I = \int_a^b X(x) dx \tag{5.73}$$

โดยที่

$$X(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y) dy \tag{5.74}$$

ในการคำนวณหาค่าปริพันธ์จากสมการ (5.73) จะต้องแบ่งช่วงของการหาค่าปริพันธ์ออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กันที่ระยะ (h_x) ตามแนวแกน x จากนั้นก็สามารถใช้วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูในการหาค่าปริพันธ์ ดังนั้น

$$I = \frac{h_x}{2}[X_0 + 2X_1 + 2X_2 + \cdots + 2X_i + \cdots + +2X_{n-1} + X_n] \tag{5.75}$$



รูปที่ 5.10: การคำนวณหาค่าปริพันธ์ในฟังก์ชันสองมิติ

ในลักษณะเดียวกันค่าของ h_y จากสมการ (5.74) ก็สามารถหาค่าได้โดยการแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์ในแนวแกน y ออกเป็นจำนวนเท่ากันกับแกน x คือ m ช่วง จะได้ว่า

$$h_y = \frac{q(x_i) - p(x_i)}{m} \tag{5.76}$$

จากนั้นก็สามารถหาค่าของ X_i ในสมการ (5.75) ได้ด้วยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูได้

$$X_i = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x_i, y)dy = \frac{h_y}{2}[f_{i,0} + 2f_{i,1} + \cdots + 2f_{i,j} + \cdots + 2f_{i,m-1} + f_{i,m}] \tag{5.77}$$

โดยที่

$$f_{i,j} = f(x_i, y_{i,j}); j = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{5.78}$$

ตัวอย่าง 5.5. *ให้ใช้วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูหาค่าปริพันธ์ของสมการข้างล่างนี้ ด้วยช่วง* $m = n = 2$

$$\int_0^{1/2} \int_0^{1/2} e^{y-x} dy dx \tag{E1}$$

วิธีทำ

ที่ $n = 2$ *พิจารณาเทอม*

$$X_i = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x_i, y)dy = \int_0^{1/2} e^{y-x}dy \tag{E2}$$

สมการ (E1) *สามารถแสดงได้ดังนี้*

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} e^{y-x}dydx &= \int_0^{1/2} X_i(x)dx \\ &\approx \frac{1}{8}[X(0) + 2X(1/4) + X(1/2)] \\ &\approx \frac{1}{8}\left[\int_0^{1/2} e^{y-0}dy + 2\int_0^{1/2} e^{y-1/4} + \int_0^{1/2} e^{y-1/2}\right]\end{aligned} \tag{E3}$$

ขั้นตอนต่อไป ใช้วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูหาค่าปริพันธ์ของสมการ (E3) *ด้วย* $m = 2$

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} e^{y-x}dydx \approx& \frac{1}{8}\left[\int_0^{1/2} e^{y-0}dy + 2\int_0^{1/2} e^{y-1/4} + \int_0^{1/2} e^{y-1/2}\right] \\ \approx& \frac{1}{8}\left[\frac{1}{8}\left[e^{0-0} + 2e^{1/4-0} + e^{1/2-0}\right] + \right. \\ & 2\frac{1}{8}\left[e^{0-1/4} + 2e^{1/4-1/4} + e^{1/2-1/4}\right] + \\ & \left.\frac{1}{8}\left[e^{0-1/2} + 2e^{1/4-1/2} + e^{1/2-1/2}\right]\right] \\ \approx& \frac{1}{64}\left[e^0 + 2e^{1/4} + e^{1/2}\right] + \\ & \frac{1}{32}\left[e^{-1/4} + 2e^0 + e^{1/4}\right] + \\ & \frac{1}{64}\left[e^{-1/2} + 2e^{-1/4} + e^0\right] \\ \approx& \frac{3}{32}e^0 + \frac{1}{16}e^{-1/4} + \frac{1}{64}e^{-1/2} + \frac{1}{16}e^{1/4} + \frac{1}{64}e^{1/2} \\ \approx& 0.25791494889765\end{aligned} \tag{E4}$$

โดยที่ คำตอบจริงมีค่าเท่ากับ ***0.255251930412762***

นอกจากวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูแล้ว วิธีการหาค่าปริพันธ์แบบอื่นก็สามารถนำมาใช้ในการหาค่าปริพันธ์แบบสอง หรือสามมิตินี้ได้เช่นกัน

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงคำนวณหาค่าปริพันธ์ของสมการต่อไปนี้

$$\int_0^{\pi/2} (8 + 4\cos x)dx$$

ด้วยวิธี (ก) กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (ข) ซิมป์สัน 1/3 (ค) เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้ กับคำตอบจริง

2. จงคำนวณหาค่าปริพันธ์ของสมการต่อไปนี้

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)dx$$

ด้วยวิธี (ก) กฎสี่เหลี่ยมคางหมู 4 ช่วงการคำนวณ (ข) ซิมป์สัน 1/3 (ค) ซิมป์สัน 3/8 (ง) เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับคำตอบจริง และวิเคราะห์ผลความคลาดเคลื่อนจากผลการเปรียบเทียบที่ได้

3. จงคำนวณหาค่าปริพันธ์ของสมการต่อไปนี้

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

ด้วยวิธี (ก) ซิมป์สัน 1/3 จำนวน 4 ช่วงการคำนวณ (ค) ซิมป์สัน 3/8 จำนวน 4 ช่วงการคำนวณ
(ง) เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้ และวิเคราะห์ผลความคลาดเคลื่อนจากผลการเปรียบเทียบที่ได้

4. จงคำนวณหาค่าปริพันธ์ของข้อมูลในตารางต่อไปนี้

x	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	35	5	-10	2	5	3	20

ด้วยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีซิมป์สัน

5. จงคำนวณหาค่าปริพันธ์ของสมการต่อไปนี้

$$\int_{-2}^{2}\int_0^4 (x^2 - 3y^2 + xy^3)dxdy$$

ด้วยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีซิมป์สัน

6. จงคำนวณหาระยะทางที่ได้จากการเก็บข้อมูลต่อไปนี้

t, min	1	2	3.25	4.5	6	7	8	9	9.5	10
v, m/s	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

ด้วยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

7. ความเร็วของวัตถุที่ตกในแนวดิ่งสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

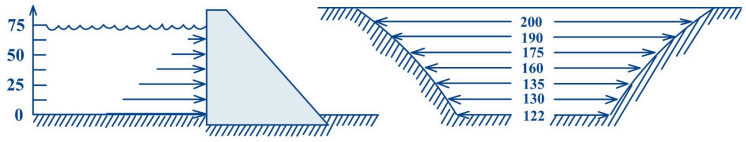
$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right)$$

ถ้า g=9.8 m/s^2 , m = 68.1 kg, และ c_d=0.25 kg/m จงคำนวณหาระยะตกของวัตถุที่วินาทีที่ 10 min ด้วยวิธีซิมป์สัน 1/3 ที่ 20 ช่วงการคำนวณ

8. ข้อที่ 9 หน้าที่ 814 มวลน้ำสร้างแรงดันต่อเขื่อนที่ต้นทางน้ำตามรูปที่ 5.11 ความดันสถิตย์ของน้ำสามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$p(z) = \rho g(D - z))$$

โดยที่ $p(z)$ คือ ความดัน (Pa) ที่กระทำต่อเขื่อน ณ ระดับความสูง z (m) จากก้นอ่างเก็บน้ำ ρ คือ ความหนาแน่นของน้ำ (1000 kg/m^3) และ D คือ ระดับน้ำของผิวน้ำเหนือก้นอ่างเก็บน้ำ จากความสัมพันธ์ดังกล่าว ความดันจะเพิ่มขึ้นตามความลึกดังที่แสดงในรูปที่ 5.11 ความดันสถิตย์จะสร้างแรงที่กระทำกับเขื่อน f_t ซึ่งหาได้จากการคูณแรงกับพื้นผิวของเขื่อนดังรูปที่ 5.11 เนื่องจากทั้งความดันและพื้นที่ขึ้นอยู่กับความลึก ดังนั้นแรงกระทำทั้งหมดจึงหาได้จากสมการดังนี้



รูปที่ 5.11: ระดับน้ำเหนือเขื่อนและภาพตัดขวางของอ่างเก็นน้ำเหนือเขื่อน

$$f_t = \int_0^D [\rho g w(z)(D - z)]dz$$

เมื่อ $w(z)$ คือ ความกว้างของเขื่อนที่ความสูง z หา line of action ได้จากการคำนวณหา

$$d = \frac{\int_0^D [\rho g z w(z)(D - z)]dz}{\int_0^D [\rho g w(z)(D - z)]dz}$$

ใช้กฎของ Simpson ในการหาค่า f_t และ d

9. คานยาว 11 m รับแรงกระทำและแรงเฉือนตามสมการดังนี้

$$V(x) = 5 + 0.25x^2$$

โดยที่ V คือ แรงเฉือน และ x คือ ระยะทางตามแนวยาวของคาน เนื่องจาก $V = dM/dx$ และ M คือ โมเมนต์แรงบิด ดังนั้น

$$M = M_0 + \int_0^x V\,dx$$

ถ้าหาก M_0 มีค่าเป็น 0 และ $x = 11$ จงคำนวณหา M โดยวิธีการ (ก) analytic integration (ข) composite trapezoidal rule (ค) composite Simpson's rule กำหนดให้ใช้ช่วงการคำนวณปริพันธ์เชิงตัวเลขเท่ากับ 1 m

10. ข้อที่ 13 หน้าที่ 816 มวลทั้งหมดของแท่งทรงกระบอกที่มีความหนาแน่นและพื้นที่หน้าตัดไม่คงที่ สามารถคำนวณได้จาก

$$m = \int_0^L \rho(x)A(x)dx$$

m คือ มวล, ρ คือ ความหนาแน่น, A คือ พื้นที่หน้าตัด, x คือ ระยะทางตามแนวยาวของแท่งทรงกระบอก และ L คือ ความยาวทั้งหมดของแท่งทรงกระบอก ข้อมูลด้านล่างเป็นข้อมูลที่วัดได้จากแท่งทรงกระบอกยาว 20 m จงหามวลในหน่วยกรัมโดยใช้ วิธี trapezoidal rule และวิธี Simpson's rule แล้วเปรียบเทียบผลการคำนวณเป็นร้อยละระหว่างคำตอบของสองวิธีนี้

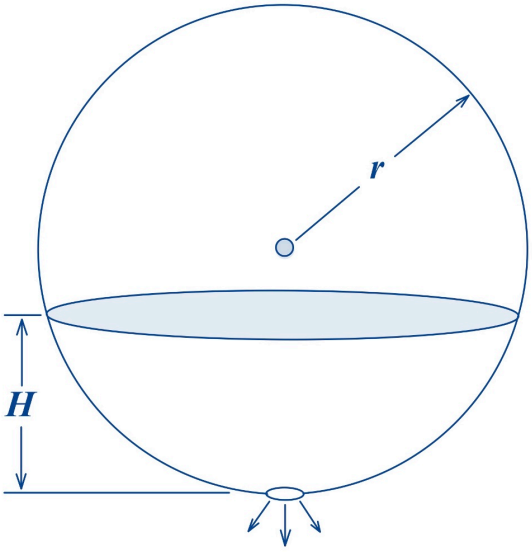
x, m	0	4	6	8	12	16	20
ρ, g/cm^3	4.00	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
A_c, cm^2	100	103	106	110	120	133	150

11. ภาชนะทรงกลมมีรูปเปิดอยู่ที่ใต้ภาชนะเพื่อระบายของไหลออกตามรูปที่ 5.12 ข้อมูลในตารางข้างล่างนี้เป็นข้อมูลที่เก็บอัตราการการไหลเชิงปริมาตรผ่านรูเปิดที่เวลาต่าง ๆ และในจุดเวลาสุดท้ายคือเวลาที่ถังได้ระบายของไหลออกจนหมด

t, s	0	500	1000	1500	2200	2900
Q, m^3/hr	10.55	9.576	9.072	8.640	8.100	7.560
t, s	3600	4300	5200	6500	7000	7500
Q, m^3/hr	7.020	6.480	5.688	4.752	3.348	1.404

จงประมาณค่าหาปริมาตรของของไหลที่ถูกระบายออกในช่วงเวลาทั้งหมด (ข) ประมาณระดับของไหลเริ่มต้นในภาชนะ เมื่อถังมี $r = 1.5$ m ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของของไหล V, รัศมี r, และความลึก H สามารถเขียนได้ดังนี้

$$V = \pi H^2 \frac{3r - H}{3}$$

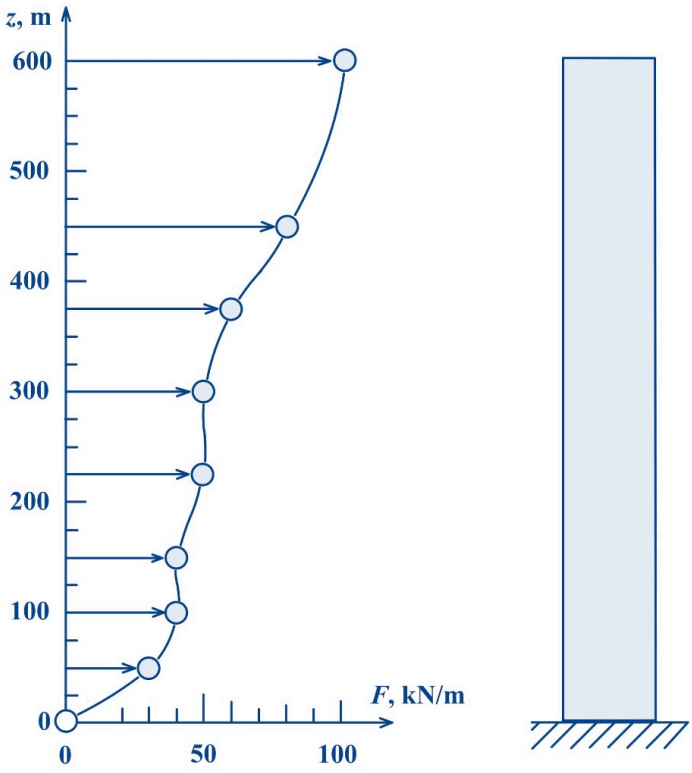


รูปที่ 5.12: ถังน้ำทรงกลมที่มีรูระบายน้ำอยู่ด้านล่าง

12. ลมพายุพัดปะทะตึกระฟ้าด้านหนึ่งตามภาพที่ 5.13 จงใช้วิธี trapezoidal, Simpson's 1/3, และ Simpson 3/8 เพื่อคำนวณหา (ก) แรงลัพธ์ที่กระทำต่อตึก F ในหน่วย kN และตำแหน่งแนวเส้นแรงลัพธ์ d ในหน่วยเมตร โดยที่

$$F = \int_0^H f(z)dz$$

$$d = \frac{\int_0^H zf(z)dz}{\int_0^H f(z)dz}$$



รูปที่ 5.13: ตึกที่ถูกแรงลมกระทำ

6. การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical differentiation)

6.1	พื้นฐานของการประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่อง (Finite difference)	155
6.2	ผลต่างแบบสืบเนื่องจากอนุกรมเทย์เลอร์	157
6.3	ตัวดำเนินการผลต่าง (Difference operators)	172
6.4	การประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ตัวดำเนินการผลต่าง	174
6.5	การหาอนุพันธ์ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม	175
6.6	การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องของอนุพันธ์ย่อย	179
	แบบฝึกหัดท้ายบท	183

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข คือการคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของสมการคณิตศาสตร์หรือชุดข้อมูลด้วยวิธีเชิงตัวเลข งานวิเคราะห์หรือแก้ปัญหาด้านวิศวกรรมโดยมากจะเกี่ยวข้องกับสมการอนุพันธ์ เช่น ความเร็วที่เป็นอนุพันธ์ของการขจัดต่อเวลา ความเร่งที่เป็นอนุพันธ์ของความเร็วต่อเวลา หรือการถ่ายเทความร้อนที่ต้องคำนวณอนุพันธ์ของอุณหภูมิต่อระยะทางในทิศทางที่พิจารณาการถ่ายเทความร้อน เป็นต้น ในบางครั้งสมการอนุพันธ์ของงานด้านวิศวกรรมจะอยู่ในรูปที่ซับซ้อน ไม่เป็นเชิงเส้น หรือการหาคำตอบจากสมการอนุพันธ์พร้อม ๆ กันทีเดียวหลาย ๆ สมการ ซึ่งสมการที่อยู่ในรูปที่กล่าวมาข้างต้นนี้ สามารถคำนวณหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีการหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลขได้ พิจารณานิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{6.1}$$

ค่าของ $(x - x_0)$ ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6.2}$$

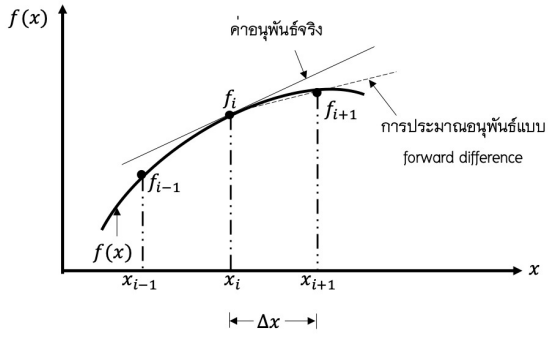
โดยที่

$$\Delta x = x - x_0 \tag{6.3}$$

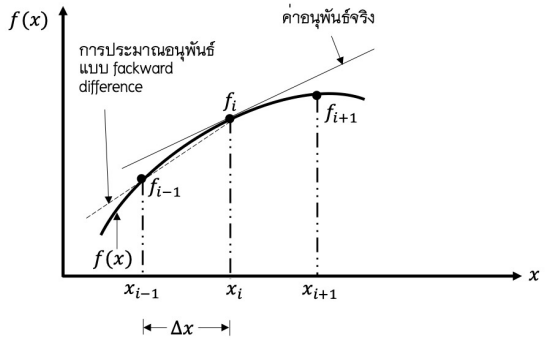
6.1 พื้นฐานของการประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่อง (Finite difference)

พิจาณาฟังก์ชัน $f(x)$ ดังแสดงในรูป 6.1 จะเห็นได้ว่าข้อมูลของฟังก์ชันที่จุด x_{i-1}, x_i, x_{i+1} สามารถใช้ในการประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างแบบสืบเนื่องได้ โดยอาศัยสมการที่ (6.2) ซึ่งอนุพันธ์ของ f ที่ตำแหน่ง $(x_i, y_i) = (df/dx)_i$ จะประมาณได้จาก $(\Delta f/\Delta x)$ ซึ่งเป็นอัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของ f ต่อ x ที่สามารถคำนวณได้

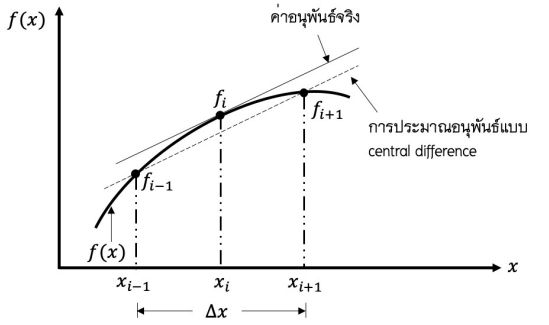
สามแบบดังนี้



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 6.1: การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง (ก) วิธีผลต่างแบบสืบเนื่องไปข้างหน้า (ข) วิธีผลต่างแบบสืบเนื่องไปข้างหลง (ค) วิธีผลต่างแบบสืบเนื่องศูนย์กลาง

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_i \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{6.4}$$

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_i \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \tag{6.5}$$

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_i \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \tag{6.6}$$

โดยที่ $f_i = f(x_i)$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$ และ $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ การคำนวณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องของสมการแคลคูลัส รวมถึงสมการ (6.4) ถึง (6.6) มีที่มาได้จากสามแนวทาง คือ ใช้อนุกรมเทย์เลอร์, ใช้ดิฟเฟอเรนซ์โอเปอเรเตอร์ (Difference operators) และการหาอนุพันธ์ของสมการจากการประมาณค่าในช่วง (Interpolation function)

6.2 ผลต่างแบบสืบเนื่องจากอนุกรมเทย์เลอร์

อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$รอบตำแหน่ง $x = x_i$ สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}f''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{3!}f'''(x_i) \\ &+ \ldots + \frac{(x - x_i)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \cdots \end{aligned} \tag{6.7}$$

อนุกรมเทย์เลอร์นี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ในกรณี x มีค่าใกล้เคียงกับ x_i เท่านั้น โดยที่

$$f'(x_i) = \frac{df}{dx}(x = x_i)$$

หากกำหนดให้ $\Delta x = x - x_i$ สมการ (6.7) สามารถเขียนได้ว่า

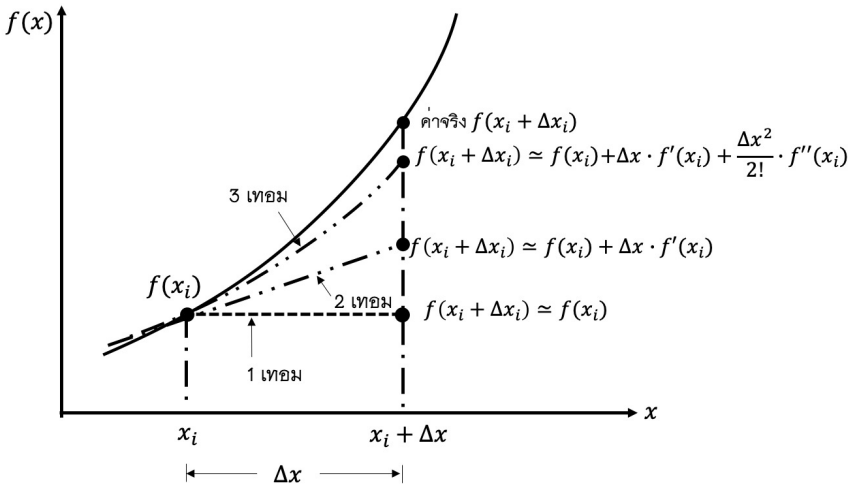
$$\begin{aligned} f(x_i + \Delta x) =& f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x_i) \\ &+ \ldots + \frac{(\Delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \cdots \end{aligned} \tag{6.8}$$

และถ้ากำหนดให้ $-\Delta x = x - x_i$ และ สมการ (6.7) สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x_i - \Delta x) =& f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x_i) \\ &+ \ldots + (-1)^n\frac{(\Delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + \cdots \end{aligned} \tag{6.9}$$

ผลเฉลยจริงของ $f(x_i + \Delta x)$ และ $f(x_i - \Delta x)$ สามารถคำนวณโดยใช้จำนวนเทอมที่ไม่จำกัดเท่านั้น ซึ่งในทางปฏิบัตินั้น $f(x_i + \Delta x)$ และ $f(x_i - \Delta x)$ จะทำการคำนวณได้จากไม่กี่เทอมแรกของสมการ (6.8) และ (6.9) ถ้าใช้เทอมของ

อนุกรมเทย์เลอร์จำนวน n เทอมประมาณค่าของสมการ (6.8) จะได้ผลการคำนวณแสดงได้ดังรูป 6.2 และค่าความคลาดเคลื่อนของการปัดเทอมที่เหลือทิ้งสามารถแสดงได้ดังสมการ (6.10)



รูปที่ 6.2: การประมาณค่าอนุพันธ์โดยการเลือกใช้จำนวนเทอมต่างกันจากอนุกรมเทย์เลอร์

$$R_n = \frac{(x-x_i)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) = \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi); x_i < \xi < x = x_i + \Delta x \tag{6.10}$$

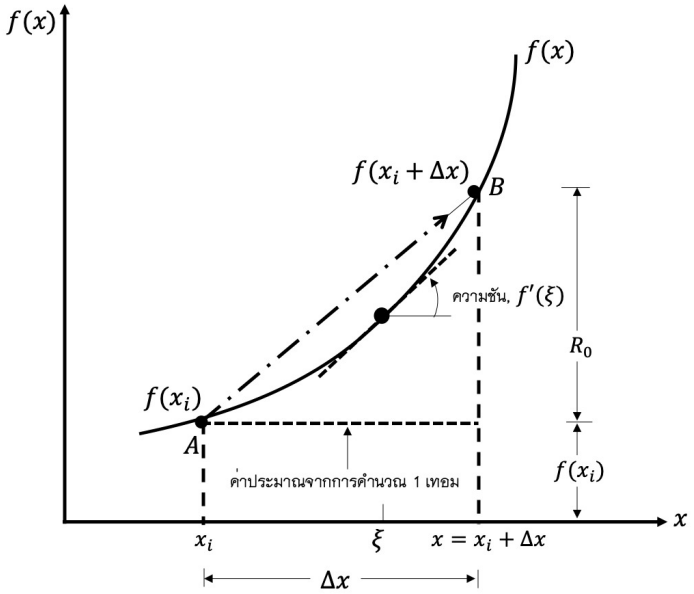
โดยที่ตัวห้อย n บอกถึงเศษของการประมาณค่าถึงอันดับที่ nth, f^{n+1} คืออนุพันธ์ลำดับที่ $n+1$ ของ f ที่ประเมิน ณ ตำแหน่ง ξ ซึ่งเป็นตำแหน่งอยู่ระหว่าง x_i และ x_{i+1} เนื่องจาก $f^{n+1}(\xi)$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น เศษของสมการ (6.10) จึงขึ้นอยู่กับ Δx ที่เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$R_n = O\left((\Delta x)^{n+1}\right) \tag{6.11}$$

สมการที่ (6.11) แสดงให้เห็นว่า ค่าความคลาดเคลื่อนจะลดลง ถ้า Δx ลดลง เช่น ถ้า Δx มีขนาดลดลงครึ่งหนึ่ง ค่าของความคลาดเคลื่อนจะมีค่าเป็น $(1/(2^{n+1}))$ ของความคลาดเคลื่อนเดิม รูปที่ 6.3 คือการแสดงความหมายของสมการ (6.11) ที่ใช้อันดับที่ศูนย์ในรูปของกราฟิก จะเห็นได้ว่า

$$R_0 \approx \Delta x f'(\xi) \tag{6.12}$$

ตัวอย่าง 6.1. *จงใช้อนุกรมเทย์เลอร์คำนวณหาค่าความดัน p ที่ $v = 0.051, 0.054$ และ 0.065 จากสมการ Van der Waals*



รูปที่ 6.3: ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่าด้วยจำนวนเทอมหนึ่งเทอม

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{E1}$$

โดยที่ $R = 0.461889$ *kJ/kg-K*, $T = 623.15K$, $a = 1.7048$ *และ* $b = 0.0016895$ *หากรู้ค่า* p *และอนุพันธ์ของ* p *ที่ค่า* $v = 0.05$

วิธีทำ *ที่* $v = 0.05$

$$p = RT(v-b)^{-1} - av^{-2} = 5275.917952 \tag{E2}$$

$$p' = \frac{dp}{dv} = -RT(v-b)^{-2} + 2av^{-3} = -96047.0727 \tag{E3}$$

$$p'' = \frac{d^2p}{dv^2} = 2RT(v-b)^{-3} - 6av^{-4} = 3,468,860.696 \tag{E4}$$

และ

$$p''' = \frac{d^3p}{dv^3} = -6RT(v-b)^{-4} + 24av^{-5} = -161,560,045.4 \tag{E5}$$

อนุกรมเทย์เลอร์ ของ p ที่ $(v+dv)$ เขียนได้ว่า

$$p(v+dv) = p(v) + p'(v)dv + p''(v)\frac{(dv)^2}{2} + p'''(v)\frac{(dv)^3}{6} + \cdots \tag{E6}$$

คำตอบของ (E6) *คือ*

Value of v	*Two–terms solution*	*Three–terms solution*	*Four–terms solution*	*Exact solution*
0.051	*5179.871582*	*5181.605957*	*5181.579102*	*5181.575195*
0.054	*4891.729980*	*4919.480957*	*4917.757812*	*4917.626953*
0.060	*4315.447754*	*4488.890625*	*4461.963867*	*4462.539062*

6.2.1 การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ รอบจุด $x = x_i$ แสดงได้ว่า

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x f_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f_i'' + \frac{(\Delta x)^3}{3!}f_i''' + \frac{(\Delta x)^4}{4!}f_i'''' + \frac{(\Delta x)^5}{5!}f_i^{(5)} + \cdots \tag{6.13}$$

โดยที่ $\Delta x = (x_{i+1} - x_i)$ หรือสามารถเขียนอีกแบบได้ว่า

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x f_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f_i'' - \frac{(\Delta x)^3}{3!}f_i''' + \frac{(\Delta x)^4}{4!}f_i'''' - \frac{(\Delta x)^5}{5!}f_i^{(5)} + \cdots \tag{6.14}$$

โดยที่ $\Delta x = (x_i - x_{i-1})$ ย้ายข้างสมการ (6.13) หา $f'(x)$ จะได้

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!}f_i'' - \frac{(\Delta x)^2}{3!}f_i''' - \cdots \tag{6.15}$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2}f''(\xi); x_i < \xi < x_{i+1} \tag{6.16}$$

หรือ

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{6.17}$$

โดยที่เทอม

$$O(\Delta x) = -\frac{\Delta x}{2}f''(\xi)$$

สมการ (6.17) เรียกว่า การประมาณค่าด้วยผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างไปข้างหน้า (Forward difference) พิจารณาสมการ (6.14) จะได้

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!} f_i'' - \frac{(\Delta x)^2}{3!} f_i''' + \cdots \tag{6.18}$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2} f''(\xi); x_{i-1} < \xi < x_i \tag{6.19}$$

หรือ

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{6.20}$$

โดยที่

$$O(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2} f''\xi$$

สมการ (6.20) เรียกว่า การประมาณค่าผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างไปข้างหลัง (Backward difference) ถ้านำเอาสมการ (6.13) ตั้งลบด้วยสมการ (6.14) จะได้

$$f_{i+1} - f_i = 2\Delta x f_i' + \frac{(\Delta x)^3}{3} f_i''' + \frac{(\Delta x)^5}{60} f_i^{(5)} + \cdots \tag{6.21}$$

ซึ่งสามารถย้ายข้าง หาค่า f_i' ได้

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} f_i''' - \frac{(\Delta x)^4}{120} f_i^{(5)} - \cdots \tag{6.22}$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(\xi); x_{i-1} < \xi < x_{i+1} \tag{6.23}$$

หรือ

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{6.24}$$

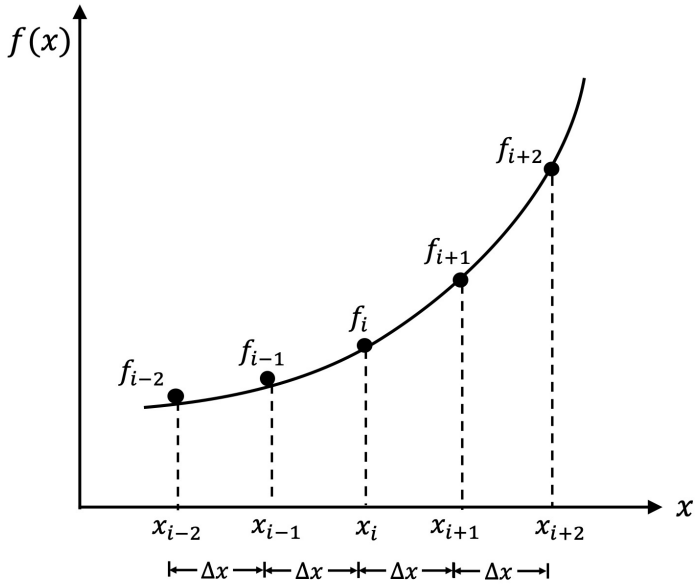
โดยที่

$$O(\Delta x^2) = -\frac{(\Delta x)^2}{2} f'''\xi$$

สมการ (6.24) เรียกว่าการประมาณค่าผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างศูนย์กลาง (Central difference) จะสังเกตุได้ว่า ค่าความคลาดเคลื่อนของผลต่างศูนย์กลางเป็นสัดส่วนของ $(\Delta x)^2$ ซึ่งแม่นยำกว่าแบบผลต่างไปข้างหน้าและผลต่างไปข้างหลัง เนื่องจาก เมื่อ Δx ลดลงครึ่งหนึ่งความคลาดเคลื่อนของผลต่างศูนย์กลางจะลดลงสี่เท่า

6.2.2 การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องผลต่างแบบสืบเนื่องสำหรับอนุพันธ์อันดับสอง

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง ทำได้ด้วยการกำจัดเทอมอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งออกจากอนุกรมเทย์เลอร์ ถ้าเราพิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับตำแหน่ง $f_{i+2} = f(x_{i+2})$ โดยใช้สมการ (6.7) โดยที่ $(x - x_i) = (x_{i+2} - x_i) = 2\Delta x$ ดังแสดงในรูป 6.4



รูปที่ 6.4: กริดของอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับตำแหน่ง f_{i+2}

$$f_{i+2} = f(x_i) + (2\Delta x)f_i' + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}f_i'' + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}f_i''' + \cdots \tag{6.25}$$

นำเอาค่า 2 คูณสมการ (6.13) แล้วเอาไปลบออกจากสมการ (6.25) จะได้

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + (\Delta x)^2 f_i'' + (\Delta x)^3 f_i''' - \cdots \tag{6.26}$$

ย้ายข้างสมการ (6.26) จะได้ ค่าอนุพันธ์อันดับสอง f_i'' ดังนี้

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} - (\Delta x)f_i''' + \cdots \tag{6.27}$$

หรือ

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \tag{6.28}$$

สมการข้างต้น คือผลต่างไปข้างหน้าของ f_i'' ส่วนในกรณีผลต่างไปข้างหลังสามารถพิจารณาได้จาก $f_{i-2} = f(x_{i-2})$

โดยที่ $(x - x_i) = -2\Delta x$

$$f_{i-2} = f_i - (2\Delta x)f_i' + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}f_i'' - \frac{(2\Delta x)^3}{3!}f_i''' + \cdots \tag{6.29}$$

ถ้านำเอาค่า 2 คูณสมการ (6.14) แล้วเอาไปลบออกจาก สมการ (6.29) จะได้

$$f_{i-2} - 2f_{i-1} = -f_i + (\Delta x)^2 f_i'' - (\Delta x)^3 f_i''' + \cdots \tag{6.30}$$

ซึ่งจะได้

$$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \tag{6.31}$$

ถ้านำเอาสมการ (6.12) บวกกับสมการ (6.13) จะได้

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + (\Delta x)^2 f_i'' + \frac{(\Delta x)^4}{12}f_i'''' + \cdots \tag{6.32}$$

จะได้

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \tag{6.33}$$

สมการ (6.33) เรียกว่าผลต่างศูนย์กลาง สำหรับ f_i''

ตัวอย่าง 6.2. *จงคำนวณค่า (dp/dv) และ (d^2p/dv^2) ของสมการ Van der Waals ที่ $v = 0.05$ โดยใช้ ผลต่างไปข้างหลัง ผลต่างไปข้างหน้า และผลต่างศูนย์กลาง*

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \tag{E1}$$

โดยที่ $R = 0.461889$ kJ/kg-K, $T = 623.15$K, $a = 1.7048$ และ $b = 0.0016895$

วิธีทำ *พิจารณา $\Delta v = 0.005$ จากสมการ จะได้ว่า*

$$p(v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{v^2} = \frac{287.8261304}{v - 0.0016895} - \frac{1.7048}{v^2} \tag{E2}$$

ผลต่างไปข้างหลัง

$$\begin{aligned}\left.\frac{dp}{dv}\right|_{v=0.05} &= \frac{1}{(\Delta v)}(p|_v - p|_{v-\Delta v}) = \frac{1}{0.005}(p(0.05) - p(0.045)) \\ &= (5275.918457 - 5803.767090)/0.005 \\ &= -0.1055697266 \times 10^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2p}{dv^2}\right|_{v=0.05} &= \frac{1}{(\Delta v)^2}(p|_v - 2p|_{v-\Delta v} + p|_{v-2\Delta v}) \\ &= \frac{1}{(0.005)^2}(p(0.05) - 2p(0.045) + p(0.04)) \\ &= \frac{1}{(0.005)^2}(5275.918457 - 2(5803.767090) + 6447.483398) \\ &= 0.4634707000 \times 10^7\end{aligned} \tag{E3}$$

ผลต่างไปข้างหน้า

$$\begin{aligned}\left.\frac{dp}{dv}\right|_{v=0.05} &= \frac{1}{(\Delta v)}(p|_{v+\Delta v} - p|_v) = \frac{1}{0.005}(p(0.055) - p(0.05)) \\ &= (4835.481445 - 5275.918457)/0.005 \\ &= -0.8808740625 \times 10^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2p}{dv^2}\right|_{v=0.05} &= \frac{1}{(\Delta v)^2}(p|_{v+2\Delta v} - 2p|_{v+\Delta v} + p|_v) \\ &= \frac{1}{(0.005)^2}(p(0.06) - 2p(0.055) + p(0.05)) \\ &= \frac{1}{(0.005)^2}(4462.539062 - 2(4835.481445) + 5275.918457) \\ &= 0.2699785250 \times 10^7\end{aligned} \tag{E4}$$

ผลต่างศูนย์กลาง

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dp}{dv}\right|_{v=0.05} &= \frac{1}{2(\Delta v)}(p|_{v+\Delta v} - p|_{v-\Delta v}) = \frac{1}{0.01}(p(0.055) - p(0.045)) \\
&= (4835.481445 - 5803.767090)/0.01 \\
&= -0.9682857031 \times 10^5 \\
\left.\frac{d^2p}{dv^2}\right|_{v=0.05} &= \frac{1}{(\Delta v)^2}(p|_{v+\Delta v} - 2p|_v + p|_{v-\Delta v}) \\
&= \frac{1}{(0.005)^2}(p(0.055) - 2p(0.05) + p(0.045)) \\
&= \frac{1}{(0.005)^2}(4835.481445 - 2(5275.918457) + 5803.767090) \\
&= 0.3496465000 \times 10^7
\end{aligned} \tag{E5}$$

ค่าจริงของอนุพันธ์

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dp}{dv}\right|_{v=0.05} &= -0.9204707031 \times 10^5 \\
\left.\frac{d^2p}{dv^2}\right|_{v=0.05} &= 0.3468860750 \times 10^7
\end{aligned} \tag{E6}$$

6.2.3 การประมาณค่าอนุพันธ์ลำดับสูงด้วยผลต่างแบบสืบเนื่อง

ในการคำนวณค่าประมาณของอนุพันธ์ลำดับสูง ๆ นั้น สามารถนำเทคนิคที่ใช้ในการหาอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งและสองมาประยุกต์ใช้ได้ เช่น ในการหาค่าประมาณของ f'''_{i+3}

$$f_{i+3} = f_i + (3\Delta x)f_i' + \frac{(3\Delta x)^2}{2!}f_i'' + \frac{(3\Delta x)^3}{3!}f_i''' + \frac{(3\Delta x)^4}{4!}f_i'''' + \cdots \tag{6.34}$$

ใช้สมการ (6.34), (6.25) และ (6.13) ในการคำนวณหา

$$f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} = f_i + (\Delta x)^3 f_i''' + \frac{3}{2}(\Delta x)^4 f_i'''' + \cdots \tag{6.35}$$

$$f_i''' = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{(\Delta x)^3} - \frac{3}{2}(\Delta x)f_i'''' \tag{6.36}$$

หรือ

$$f_i''' = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{(\Delta x)^3} + O(\Delta x) \tag{6.37}$$

ในลักษณะเดียวกัน ถ้าเราลบสมการ (6.25) ด้วยสมการ (6.29) จะได้

$$f_{i+2} - f_{i-2} = 4\Delta x f_i' + \frac{8(\Delta x)^3}{3} f_i''' + \frac{8(\Delta x)^5}{15} f_i^{(5)} + \cdots \tag{6.38}$$

แทนค่า สมการ (6.22) ลงในสมการ (6.38) จะได้

$$\begin{aligned} f_{i+2} - f_{i-2} =& 4\Delta x \left\{ \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} f_i''' - \frac{(\Delta x)^5}{120} f_i^{(5)} - \cdots \right\} \\ &+ \frac{8}{3}(\Delta x)^3 f_i''' + \frac{8}{15}(\Delta x)^5 f_i^{(5)} + \cdots \\ =& 2f_{i+1} - 2f_{i-1} - \frac{2}{3}(\Delta x)^3 f_i''' - \frac{1}{30}(\Delta x)^5 f_i^{(5)} - \cdots \\ &+ \frac{8}{3}(\Delta x)^3 f_i''' \frac{8}{15}(\Delta x)^5 f_i^{(5)} + \cdots \end{aligned} \tag{6.39}$$

สมการ (6.39) เรียกว่าผลต่างศูนย์กลาง สำหรับ f_{i+3}''' โดยจัดรูปใหม่ ดังนี้

$$f_i''' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2(\Delta x)^3} - O((\Delta x)^2) \tag{6.40}$$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสูงที่ใช้กันบ่อย สามารถแสดงได้ ดังตารางที่ 6.1

6.2.4 การประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่องที่มีความแม่นยำสูงขึ้น

จากการประมาณค่าอนุพันธ์ข้างต้น จะเห็นได้ว่า การประมาณค่าแบบผลต่างไปข้างหน้า และผลต่างไปข้างหลัง จะมีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ $O(\Delta x)$ ในขณะที่ผลต่างศูนย์กลางจะมีความคลาดเคลื่อน $O(\Delta x)^2$ การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างศูนย์กลางสามารถทำให้ความแม่นยำสูงขึ้นได้ โดยการเพิ่มเทอมของอนุกรมเทย์เลอร์ เช่น ผลต่างไปข้างหน้าของ f_i'

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} f_i'' - \frac{(\Delta x)^2}{6} f_i''' - \cdots \tag{6.41}$$

แทนค่า สมการ (6.27) ลงในสมการ (6.41) จะได้

$$\begin{aligned} f_i' &= \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\left[\frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} - (\Delta x) f_i''' + \cdots \right] - \frac{(\Delta x)^2}{6} f_i''' - \cdots \\ &= \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{3} f_i''' - \cdots \end{aligned} \tag{6.42}$$

หรือ

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \tag{6.43}$$

ตารางที่ 6.1: สูตรการประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างแบบสืบเนื่องที่ใช้บ่อย

Type of approximation	Formula	Truncation error
Forward differences	$f_i' = (f_{i+1} - f_i)/(\Delta x)$	$O(\Delta x)$
	$f_i'' = (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)/(\Delta x)^2$	
	$f_i''' = (f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i)/(\Delta x)^3$	
	$f_i'''' = (f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i)/(\Delta x)^4$	
Backward differences	$f_i' = (f_i - f_{i-1})/(\Delta x)$	$O(\Delta x)$
	$f_i'' = (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2})/(\Delta x)^2$	
	$f_i''' = (f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3})/(\Delta x)^3$	
	$f_i'''' = (f_i - 4f_{i-1} + 6f_{i-2} - 4f_{i-3} + f_{i-4})/(\Delta x)^4$	
Central differences	$f_i' = (f_{i+1} - f_{i-1})/(2\Delta x)$	$O(\Delta x)^2$
	$f_i'' = (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/(\Delta x)^2$	
	$f_i''' = (f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2})/(2(\Delta x)^3)$	
	$f_i'''' = (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2})/(\Delta x)^4$	

จากสมการ (6.43) จะเห็นได้ว่า ความแม่นยำของ f_i' เพิ่มขึ้นจาก $O(\Delta x)$ ในสมการ (6.17) เป็น $O(\Delta x)^2$ ความแม่นยำของการประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่องสำหรับอนุพันธ์ลำดับสูงอื่น ๆ ก็สามารถทำได้โดยเทคนิคเดียวกันกับข้างต้นนี้ ตารางที่ 6.2 แสดงสูตรการประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่องต่าง ๆ ที่มีความแม่นยำสูง

ตารางที่ 6.2: สูตรของการประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยผลต่างแบบสืบเนื่องอันดับสูง

Type of approx.	Formula	Truncation error
Forward differences	$f_i' = (-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i)/(2(\Delta x))$	$O(\Delta x)^2$
	$f_i'' = (-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i)/(\Delta x)^2$	
	$f_i''' = (-3f_{i+4} + 14f_{i+3} - 24f_{i+2} + 18f_{i+1} - 5f_i)/(2(\Delta x)^3)$	
	$f_i'''' = (-2f_{i+5} + 11f_{i+4} - 24f_{i+3} + 26f_{i+2} - 14f_{i+1} + 3f_i)/(\Delta x)^4$	
Backward differences	$f_i' = (3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2})/(2(\Delta x))$	$O(\Delta x)^2$
	$f_i'' = (2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3})/(\Delta x)^2$	
	$f_i''' = (5f_i - 18f_{i-1} + 24f_{i-2} - 14f_{i-3} + 3f_{i-4})/(2(\Delta x)^3)$	
	$f_i'''' = (3f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 24f_{i-3} + 11f_{i-4} - 2f_{i-5})/(\Delta x)^4$	
Central differences	$f_i' = (-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2})/(12(\Delta x))$	$O(\Delta x)^4$
	$f_i'' = (-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2})/(12(\Delta x)^2)$	
	$f_i''' = (-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3})/(8(\Delta x)^3)$	
	$f_i'''' = (-f_{i+3} + 12f_{i+2} - 39f_{i+1} + 56f_i - 39f_{i-1} + 12f_{i-2} - f_{i-3})/(6(\Delta x)^4)$	

ตัวอย่าง 6.3. *จงคำนวณหาความเร็ว* (dy/dt) *, ความเร่ง* (d^2y/dt^2) *และการกระตุก* (d^3y/dt^3) *ที่เวลา* $t = 0.05, 0.20$ *และ* 0.60***sec*** *โดยใช้การประมาณค่าด้วยผลต่างแบบสืบเนื่องที่ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ* ***(Step size)****,* $\Delta t = 0.05$***sec*** *จากข้อมูลการวัดการสั่นสะเทือนของวัตถุที่เวลาต่าง ๆ มีค่าดังตารางต่อไปนี้*

Station, i	*Time,* t_i *(sec)*	*Displacement,* y_i *(inch)*
1	*0.05*	*0.144*
2	*0.1*	*0.172*
3	*0.15*	*0.213*
4	*0.20*	*0.296*
5	*0.25*	*0.070*
6	*0.30*	*0.085*
7	*0.35*	*0.525*
8	*0.40*	*0.110*
9	*0.45*	*0.062*
10	*0.50*	*0.055*
11	*0.55*	*0.042*
12	*0.60*	*0.035*

วิธีทำ *จากตารางข้อมูลเราสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์ที่เวลา* $t = 0.05$ ***sec*** *และ* $t = 0.60$ ***sec*** *โดยวิธีผลต่างไปข้างหน้า และผลต่างไปข้างหลัง ตามลำดับ ส่วนที่เวลา* $t = 0.20$ ***sec*** *จะใช้วิธีผลต่างศูนย์กลาง*

ที่เวลา $t = 0.05$ ***sec*** *สมการผลต่างไปข้างหน้า คือ*

$$y_i' = \frac{dy}{dt}(t_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} \tag{E1}$$

$$y_i'' = \frac{d^2y}{dt^2}(t_i) = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{(\Delta t)^2} \tag{E2}$$

$$y_i''' = \frac{d^3y}{dt^3}(t_i) = \frac{y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i}{(\Delta t)^3} \tag{E3}$$

กำหนดให้ $i = 1$ *และ* $t = 0.05$ *จะได้ว่า*

$$y_1' = y'(0.05) = \frac{y_2 - y_1}{\Delta t} = \frac{0.172 - 0.144}{0.05} = 0.56 \ \textit{in/sec}$$
$$y_1'' = y''(0.05) = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(\Delta t)^2} = \frac{0.213 - 2(0.172) + 0.144}{(0.05)^2} = 5.20 \ \textit{in/sec}^2$$

และ

$$y_1''' = y'''(0.05) = \frac{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1}{(\Delta t)^3}$$
$$= \frac{0.296 - 3(0.213) + 3(0.172) - 0.144}{(0.05)^3}$$
$$= 232.0 \ \textit{in/sec}^3$$

ที่เวลา $t = 0.20$ ***sec*** *สมการผลต่างศูนย์กลาง คือ*

$$y_i' = \frac{dy}{dt}(t_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \tag{E4}$$

$$y_i'' = \frac{d^2y}{dt^2}(t_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta t)^2} \tag{E5}$$

และ

$$y_i''' = \frac{d^3y}{dt^3}(t_i) = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(\Delta t)^3} \tag{E6}$$

กำหนดให้ $i = 4$ *และ* $t = 0.05$ *จะได้ว่า*

$$y_4' = y'(0.20) = \frac{y_5 - y_3}{2\Delta t} = \frac{0.070 - 0.213}{2(0.05)}$$
$$= -1.43 \ \textit{in/sec}$$
$$y_4'' = y''(0.20) = \frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{(\Delta t)^2} = \frac{0.070 - 2(0.296) + 0.213}{(0.05)^2}$$
$$= -123.60 \ \textit{in/sec}^2$$

และ

$$y_4''' = y'''(0.20) = \frac{y_6 - 2y_5 + 2y_3 - y_2}{2(\Delta t)^3}$$
$$= \frac{0.085 - 2(0.070) + 2(0.213) - 0.172}{2(0.05)^3}$$
$$= 796.0 \ in/sec^3$$

ที่เวลา $t = 0.60$ ***sec***

$$y_i' = \frac{dy}{dt}(t_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \tag{E7}$$

$$y_i'' = \frac{d^2y}{dt^2}(t_i) = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{(\Delta t)^2} \tag{E8}$$

และ

$$y_i''' = \frac{d^3y}{dt^3}(t_i) = \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{(\Delta t)^3} \tag{E6}$$

กำหนดให้ $i = 12$ *จะได้*

$$y_{12}' = y'(0.60) = \frac{y_{12} - y_1 1}{\Delta t} = \frac{0.035 - 0.042}{(0.05)}$$
$$= -0.14 \ in/sec$$
$$y_{12}'' = y''(0.60) = \frac{y_{12} - 2y_{11} + y_{10}}{(\Delta t)^2} = \frac{0.035 - 2(0.042) + 0.055}{(0.05)^2}$$
$$= 2.4 \ in/sec^2$$

และ

$$y_{12}''' = y'''(0.60) = \frac{y_{12} - 3y_{11} + 3y_{10} - y_9}{(\Delta t)^3}$$
$$= \frac{0.035 - 3(0.042) + 3(0.055) - 0.062}{(0.05)^3}$$
$$= 96.0 \ in/sec^3$$

6.3 ตัวดำเนินการผลต่าง (Difference operators)

การคำนวณผลต่างแบบสืบเนื่องมักจะใช้สำหรับการคำนวณหาค่าจากชุดข้อมูลที่เป็นข้อมูลจากการทดลอง $f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$ หรือจากค่าของฟังก์ชัน ณ ตำแหน่งต่าง ๆ เช่น $f(x-2h), f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h)$ โดยที่ค่า f_i หรือ $f(x)$ จะสอดคล้องกับค่าของ x ที่แต่ละตำแหน่งที่มีระยะห่างเท่า ๆ กัน ส่วนการใช้ตัวดำเนินการผลต่างมักจะถูกใช้ในการคำนวณจากค่าของ $f(x)$ ที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{Forward difference operator} \\ \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i \end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \text{Backward difference operator} \\ \nabla f_i &= f_i - f_{i-1} \end{aligned} \tag{6.45}$$

และ

$$\begin{aligned} \delta &= \text{Central difference operator} \\ \delta f_i &= f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{6.46}$$

หรือ

$$\delta f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - f_i \tag{6.47}$$

โดยที่

$$f_i = f(x_i),\ f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + \Delta x),\ f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

สำหรับตัวดำเนินการผลต่างอันดับ k-th ก็สามารถเขียนได้เป็น Δ^k, ∇^k และ δ^k เช่น ตัวดำเนินการผลต่างอันดับสองของ $f(x)$ ที่ x_i สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) \\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) \\ &= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) \\ &= \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) \\ &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\end{aligned} \tag{6.49}$$

และ

$$\begin{aligned}\delta^2 f_i &= \delta(\delta f_i) = \delta(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= \delta f_{i+\frac{1}{2}} - \delta f_{i-\frac{1}{2}} = (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) \\ &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\end{aligned} \tag{6.50}$$

ตัวดำเนินการผลต่างที่ต่างกันสามารถใช้ร่วมกันได้ เช่น

$$\begin{aligned}\Delta\nabla f_i &= \Delta(\nabla f_i) = \Delta(f_i - f_{i-1}) \\ &= (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\end{aligned} \tag{6.51}$$

และ

$$\begin{aligned}\nabla\Delta f_i &= \nabla(\Delta f_i) = \nabla(f_{i+1} - f_i) \\ &= (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\end{aligned} \tag{6.52}$$

ตัวดำเนินการผลต่างอันดับสูงขึ้นก็สามาถแสดงได้ด้วยวิธีเดียวกัน เช่น

$$\nabla^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \tag{6.53}$$

$$\nabla^4 f_i = f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i \tag{6.54}$$

และ

$$\nabla^5 f_i = f_{i+5} - 5f_{i+4} + 10f_{i+3} - 10f_{i+2} + 5f_{i+1} - f_i \tag{6.55}$$

6.4 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ตัวดำเนินการผลต่าง

การใช้ตัวดำเนินการผลต่างในการประมาณค่าอนุพันธ์สามารถทำได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx} \approx \frac{\Delta}{\Delta x} \text{ การประมาณค่าโดยตัวดำเนินการผลต่างไปข้างหน้า} \tag{6.56}$$

$$\frac{d}{dx} \approx \frac{\nabla}{\nabla x} \text{ การประมาณค่าโดยตัวดำเนินการผลต่างไปข้างหลัง} \tag{6.57}$$

และ

$$\frac{d}{dx} \approx \frac{\delta}{\delta x} \text{ การประมาณค่าโดยตัวดำเนินการผลต่างศูนย์กลาง} \tag{6.58}$$

จากการประยุกต์ใช้สมการ (6.56) ถึงสมการ (6.58) กับฟังก์ชัน $f(x)$ จะสามารถประมาณค่าอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx} \approx \frac{\delta}{\delta x} f(x)\Big|_{x_i} = \frac{\delta f_i}{\delta x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \tag{6.59}$$

$$\frac{d}{dx} \approx \frac{\nabla}{\nabla x} f(x)\Big|_{x_i} = \frac{\nabla f_i}{\nabla x_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \tag{6.60}$$

และ

$$\frac{d}{dx} \approx \frac{\delta}{\delta x} f(x)\Big|_{x_i} = \frac{\delta f_i}{\delta x_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \tag{6.61}$$

จะสังเกตได้ว่าผลต่างศูนย์กลางในสมการ (6.58) จะใช้ช่วงการคำนวณเท่ากับ $2h$ เพื่อเลี่ยงการคำนวณค่าที่ $f_{i+\frac{1}{2}}$ และ $f_{i-\frac{1}{2}}$ นอกจากนั้นแล้วผลต่างศูนย์กลางยังสามารถคำนวณจากการหาค่าเฉลี่ยของตัวดำเนินการผลต่างไปข้างหน้า และตัวดำเนินการผลต่างไปข้างหลังได้อีกด้วย

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_i} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\Delta x} + \frac{\nabla}{\delta x}\right) f_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} + \frac{\nabla f_i}{\delta x_i}\right) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \tag{6.62}$$

อนุพันธ์อันดับสูงสามารถคำนวณได้ด้วยตัวดำเนินการผลต่างโดยการประยุกต์ใช้สมการ (6.56) ถึง สมการ (6.58) เช่น อนุพันธ์อันดับสองของ $f(x)$ ที่ x_i สามารถประมาณ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x_i} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)\Big|_{x_i} \approx \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)\Big|_{x_i} \approx \frac{\Delta^2 f_i}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \end{aligned} \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\Big|_{x_i} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)\Big|_{x_i} \approx \frac{\nabla}{\nabla x}\left(\frac{\nabla f}{\nabla x}\right)\Big|_{x_i} \approx \frac{\nabla^2 f_i}{(\nabla x)^2} \\ &= \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2}\end{aligned} \tag{6.64}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\Big|_{x_i} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)\Big|_{x_i} \approx \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)\Big|_{x_i} \approx \frac{\delta^2 f_i}{(\delta x)^2} \\ &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}\end{aligned} \tag{6.65}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ และตัวดำเนินการผลต่างในสมการ (6.56) ถึง สมการ (6.58) เป็นการประมาณค่าเท่านั้น

6.5 การหาอนุพันธ์ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม

การทำการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนามทุกฟังก์ชันสามารถนำมาใช้ในการประมาณค่าของผลต่างแบบสืบเนื่องได้

6.5.1 อนุกรมกำลังของการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม (Power Series Interpolating Polynomial)

การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ n^{th} ที่ผ่านข้อมูล $(n+1)$ จุด สามารถนำมาใช้ในการประมาณค่าอนุพันธ์ได้ พิจารณาสมการพหุนามอันดับที่ 2 ของ $f(x)$ ที่ผ่านจุดสามจุด (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) และ (x_{i+2}, f_{i+2}) ดังแสดงในรูป 6.5

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{6.66}$$

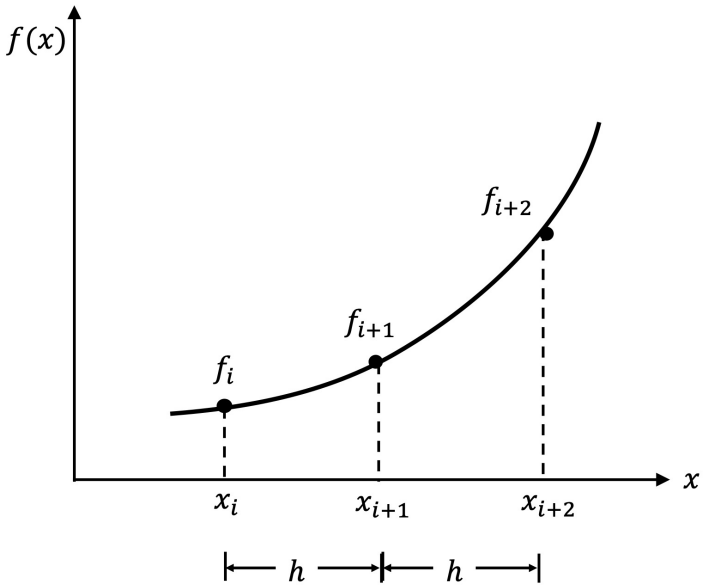
โดยที่ a_0, a_1 และ a_2 เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า โดยการกำหนดให้สมการพหุนามนี้ผ่านจุดข้อมูลทั้งสามจุด จะได้ว่า

$$f(x = x_i) = f_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \tag{6.67}$$

$$f(x = x_{i+1} = x_i + h) = f_{i+1} = a_0 + a_1(x_i + h) + a_2(x_i + h)^2 \tag{6.68}$$

และ

$$f(x = x_{i+2} = x_i + 2h) = f_{i+2} = a_0 + a_1(x_i + 2h) + a_2(x_i + 2h)^2 \tag{6.69}$$



รูปที่ 6.5: สมการพหุนามอันดับที่ 2 ของ $f(x)$ ที่ผ่านจุดสามจุด (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) และ (x_{i+2}, f_{i+2})

คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของ a_0, a_1 และ a_2 จากสมการ (6.67) ถึงสมการ (6.69) ถ้า $x_i = 0$, $x_{i+1} = h$ และ $x_{i+2} = 2h$ จะได้สมการ

$$f_i = a_0 \tag{6.70}$$

$$f_{i+1} = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \tag{6.71}$$

และ

$$f_{i+2} = a_0 + 2a_1 h + 4a_2 h^2 \tag{6.72}$$

ผลเฉลยของสมการ (6.70) ถึงสมการ (6.72) คือ

$$a_0 = f_i \tag{6.73}$$

$$a_1 = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} \tag{6.74}$$

และ

$$a_2 = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{2h^2} \tag{6.75}$$

ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (6.66) และแทนค่าด้วยสมการ (6.74) และสมการ (6.75) จะได้

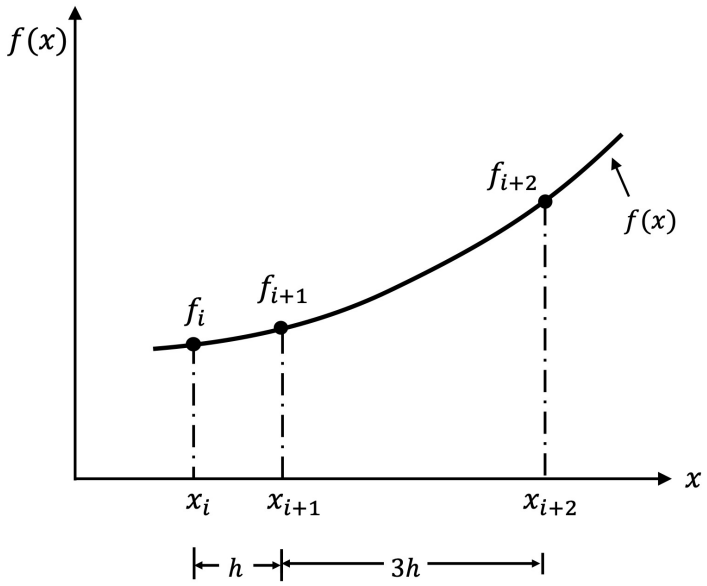
$$f'(x_i) = f_i' = f'(x = 0) = a_1 + 2a_2 x_i = a_1 = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} \tag{6.76}$$

และ

$$f''(x_i) = f_i'' = f''(x=0) = 2a_2 = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \tag{6.77}$$

สมการ (6.76) และสมการ (6.77) คือการประมาณค่าแบบผลต่างแบบสืบเนื่อง ซึ่งจะมีค่าเหมือนกับสมการ (6.43) และสมการ (6.33) ตามลำดับ

การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องด้วยด้วยการประมาณค่าในช่วงแบบพหุนามนี้มีประโยชน์มากในกรณีที่ชุดข้อมูลมีระยะห่างที่ไม่คงที่ เช่น ชุดข้อมูลดังแสดงในรูป 6.6



รูปที่ 6.6: สมการพหุนามอันดับที่ 2 ของ $f(x)$ ที่ผ่านจุดสามจุด (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) และ (x_{i+2}, f_{i+2}) ที่มีระยะห่างระหว่างข้อมูลไม่คงที่

โดยที่ $x_{i+1} = x_i + h$ และ $x_{i+2} = x_i + 4h$ ถ้ากำหนดให้ $x_i = 0$, $x_{i+1} = h$ และ $x_{i+2} = 4h$ จากสมการ (6.66) จะได้ค่า

$$f_i = a_0 \tag{6.78}$$

$$f_{i+1} = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \tag{6.79}$$

และ

$$f_{i+2} = a_0 + 4a_1 h + 16a_2 h^2 \tag{6.80}$$

ผลเฉลยของสมการ (6.78) ถึงสมการ (6.80) คือ

$$a_0 = f_i \tag{6.81}$$

$$a_1 = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 15f_i}{12h} \tag{6.82}$$

และ

$$a_2 = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 3f_i}{12h^2} \tag{6.83}$$

ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (6.66) และแทนค่าด้วยสมการ (6.82) และสมการ (6.83) จะได้

$$f'(x_i) = f_i' = f'(x=0) = a_1 + 2a_2x_i = a_1 = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 15f_i}{12h} \tag{6.84}$$

และ

$$f''(x_i) = f_i'' = f''(x=0) = 2a_2 = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 3f_i}{6h^2} \tag{6.85}$$

วิธีนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องสำหรับอนุพันธ์อันดับที่สูงขึ้นไปได้

6.5.2 การประมาณค่าในช่วงพหุนามของนิวตัน (Newton's interpolation polynomial)

พิจารณาสมการ $p(x)$ ที่ฟิตผ่านข้อมูล $(n+1)$ จุด

$$\begin{aligned} p(x) = f_n(x) &= f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0 - h) \\ &+ \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^2}(x - x_0 - h)\cdots(x - x_0 - (n-1)h) \end{aligned} \tag{6.86}$$

ในการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง กำหนดให้ $n = 2$ ดังนี้

$$p(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}(x - x_0 - h) \tag{6.87}$$

ทำการหาค่าอนุพันธ์ของสมการ (6.87) จะได้

$$p'(x) = \frac{1}{h}\Delta f_0 + \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}(2x - 2x_0 - h) \tag{6.88}$$

กำหนดให้ $x = x_0$, $x_0 + h$, และ $x_0 + 2h$ แล้วแทนค่าในสมการ (6.88) และใช้สมการ (6.44) และสมการ (6.48) จะพบว่า

$$\begin{aligned} p'(x_0) &= \frac{1}{2h}[2\Delta f_0 - \delta^2 f_0] = \frac{1}{2h}[2(f_1 - f_0) - (f_2 - 2f_1 + f_0)] \\ &= \frac{1}{2h}[-f_2 + 4f_1 - 3f_0] \end{aligned} \tag{6.89}$$

$$p'(x_0+h) = p'(x_1) = \frac{1}{2h}[2\Delta f_0 + \delta^2 f_0] = \frac{1}{2h}[2(f_1 - f_0) + (f_2 - 2f_1 + f_0)] \\ = \frac{1}{2h}[f_2 - f_0] \tag{6.90}$$

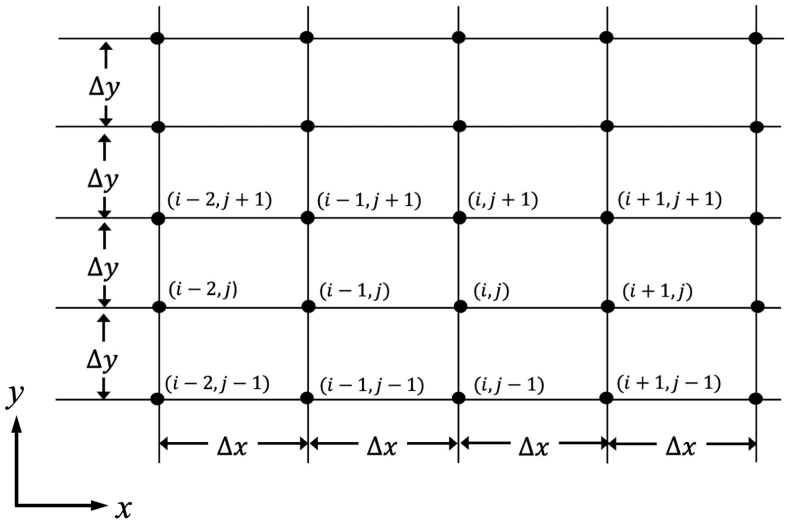
และ

$$p'(x_0+2h) = p'(x_2) = \frac{1}{2h}[2\Delta f_0 + 3\delta^2 f_0] = \frac{1}{2h}[2(f_1 - f_0) + 3(f_2 - 2f_1 + f_0)] \\ = \frac{1}{2h}[3f_2 - 4f_1 + f_0] \tag{6.91}$$

สมการ (6.89) ถึงสมการ (6.91) คือการประมาณค่าแบบผลต่างไปข้างหน้า ที่จุด 0 ผลต่างศูนย์กลางที่จุดที่ 1 และผลต่างไปข้างหลัง ที่จุดที่ 2 ซึ่งเขียนเป็นรูปแบบทั่วไปด้วยการแทนค่าตัวห้อย 0, 1 และ 2 ด้วย i, $i+1$ และ $i+2$

6.6 การประมาณค่าผลต่างแบบสืบเนื่องของอนุพันธ์ย่อย

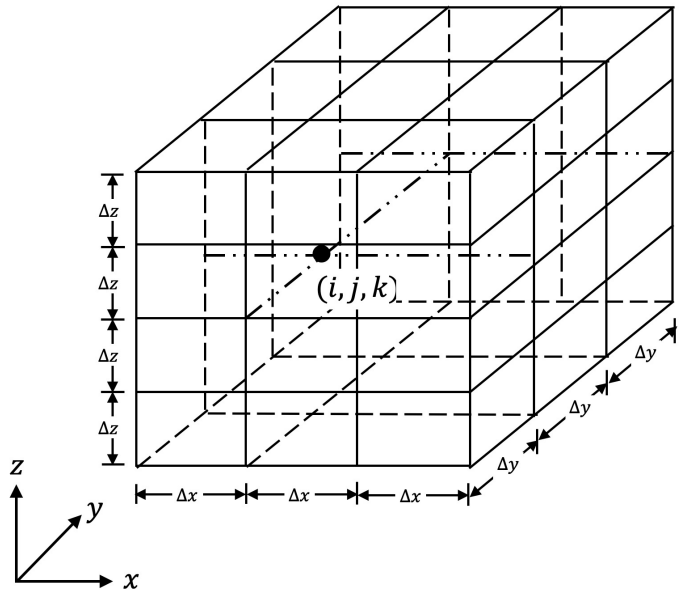
ในกรณีที่ฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัว การกำหนดตำแหน่งจะใช้ดัชนี (i,j,k) ในการแทนค่าตำแหน่งตัวแปรต้น โดยที่ step size ในทิศทาง x, y และ z คือ Δx, Δy และ Δz ตามลำดับ รูปที่ 6.7 และรูปที่ 6.8 แสดงให้เห็นถึงกริดการคำนวณของผลต่างแบบสืบเนื่องในสองและสามมิติ และการประมาณค่าแบบผลต่างไปข้างหน้า ผลต่างไปข้างหลัง และผลต่างศูนย์กลางของ $(\partial f/\partial x)$ สามารถแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 6.7: กริดการคำนวณหาค่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันแบบสองมิติ

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x} \tag{6.92}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x} \tag{6.93}$$



รูปที่ 6.8: กริดการคำนวณหาค่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันแบบสามมิติ

และ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i,j} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} \tag{6.94}$$

การประมาณค่าแบบผลต่างศูนย์กลางของอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x_i, y_j)$ สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{i,j} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{(\Delta x)^2} \tag{6.95}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{i,j} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \tag{6.96}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j} \approx \frac{1}{(4\Delta x \Delta y)}[&f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) \\ &- f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)]\end{aligned} \tag{6.97}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าอนุพันธ์อันที่ n^{th} คือ

$$R_{x,n} \equiv (-1)^{n+1} \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(x,y)}{\partial x^{n+1}}\Big|_{i,j} \tag{6.98}$$

ตัวอย่าง 6.4. *จงคำนวณหาค่า* $\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}$ *ของฟังก์ชัน* $f(x,y) = 2x^4y^3$ *ด้วยวิธีผลต่างศูนย์กลางที่ตำแหน่ง* $x = 1$ *และ* $y = 1$ *ด้วยช่วงการคำนวณ* $\Delta x = 0.1$ *และ* $\Delta y = 0.1$

วิธีทำ *จากโจทย์*

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x_i}\right)\Big|_{y_j} \tag{E1}$$

ใช้ผลต่างศูนย์กลางในการประมาณค่าจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_j) =& \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\frac{1}{h^2} f_{x_{i-1}, y_j} - 2f_{x_i, y_j} + f_{x_{i+1}, y_j}\right\} \\
=& \frac{1}{h^2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_j) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_{i+1}, y_j)\right\} \\
=& \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{h^2}\{f_{i-1,j-1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1}\}\right. \\
& - \frac{2}{h^2}\{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}\} \\
& \left. + \frac{1}{h^2}\{f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}\}\right] \\
=& \frac{1}{h^4}\{f_{i-1,j-1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j-1} + 4f_{i,j} \\
& - 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}\}
\end{aligned} \tag{E2}$$

แทนค่าลงในสมการ (E2)

$$\begin{aligned}
f_{i-1,j-1} &= f(0.9, 0.9) = 0.95659357 \\
f_{i-1,j} &= f(0.9, 1.0) = 1.31219983 \\
f_{i-1,j+1} &= f(0.9, 1.1) = 1.74653804 \\
f_{i,j-1} &= f(1.0, 0.9) = 1.45799982 \\
f_{i,j} &= f(1.0, 1.0) = 2.0 \\
f_{i,j+1} &= f(1.0, 1.1) = 2.66200018 \\
f_{i+1,j-1} &= f(1.0, 1.1) = 2.13465762 \\
f_{i+1,j} &= f(1.1, 1.0) = 2.92820024 \\
f_{i+1,j+1} &= f(1.1, 1.1) = 3.89743471
\end{aligned} \tag{E2}$$

จะได้คำตอบจากสมการ (E2) *คือ*

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x = 1.0, y = 1.0) = 144.23606873$$

คำตอบจริงของสมการนี้คือ

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x = 1.0, y = 1.0) = 144x^2 y|_{x=1.0, y=1.0} = 144.0$$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ด้วยวิธีผลต่างไปข้างหน้า และผลต่างไปข้างหลังที่อันดับ $O(h)$ และ $O(h^2)$ และวิธีผลต่างศูนย์กลางที่อันดับ $O(h^2)$ และ $O(h^4)$ ด้วย step size, $h = \pi/12$ และวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนที่ได้

$$y = \sin x \qquad \text{at} \qquad y = \pi/4$$

2. จงคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการต่อไปนี้ด้วยวิธีผลต่างศูนย์กลางที่อันดับ $O(h^2)$ ด้วย step size, $h = 1$

$$y = 2x^4 - 6x^3 - 12x - 8 \qquad \text{at} \qquad x = 1.0$$

3. จงคำนวณหาค่าความเร็วและความเร่งของจรวดจากข้อมูลต่อไปนี้

t,s	0	25	50	75	100	125
y,km	0	32	58	78	92	100

4. จงคำนวณหาค่าความเค้นเฉือนที่ผิวแผ่นเรียบ $y = 0$ จากสมการ และตารางข้อมูลต่อไปนี้ โดยที่ $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$ N/s.m^2

$$\tau = \frac{dv}{dy}$$

y,m	0	0.002	0.006	0.012	0.018	0.024
v,m/s	0	0.287	0.899	1.915	3.048	4.299

5. จงคำนวณหาค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยา และอัตราการเกิดปฏิกิริยาจากสมการและตารางข้อมูลต่อไปนี้ โดยที่ k และ n สามารถหาได้จาก กราฟล็อกของสมการ

$$\frac{dc}{dt} = -kc^n$$

t	10	20	30	40	50	60
c	3.52	2.48	1.75	1.23	0.87	0.61

6. ข้อมูลต่อไปนี้คือข้อมูลที่เก็บจากการเติมน้ำมันลงเรือบรรทุกน้ำมัน

t, min	0	10	20	30	45	60	75
V, 10^6 barrels	0.4	0.7	0.77	0.88	1.05	1.17	1.35

จงคำนวณหาอัตราการไหลเชิงปริมาตร $Q = dV/dt$ ในแต่ละช่วงเวลาโดยใช้วิธีที่มีอันดับ h^2

7. กฎของ Fourier มักใช้ในงานวิศวกรรมเพื่อหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านผนังด้วยการนำความร้อน

$$q = -k\frac{dT}{dx}$$

โดยที่ q คือ ฟลักซ์ความร้อน (W/m^2), k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (W/[m.°C]),T คือ อุณหภูมิ (°C) และ x คือ ระยะทาง (m) โดยมีข้อมูลที่วัดค่าได้จากอุณหภูมิแต่ละพื้นที่ผิวของผนัง ดังนี้

x, m	0	0.08	0.16
T, °C	20.2	17	15

หากฟลักซ์ความร้อน ณ $x = 0$ มีค่าเป็น 60 W/m^2 จงหาค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของผนัง k

8. ของไหลไหลผ่านพื้นผิวเรียบที่มีความร้อนถ่ายเทจากแผ่นเรียบสู่ชองไหล สมการของการนำความร้อนในของไหล สามารถอธิบายด้วยกฎของ Fourier ดังนี้

$$q = -k\frac{dT}{dy}$$

โดยที่ q คือฟลักซ์ความร้อน (W/m^2), k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (W/[m.K]),T คือ อุณหภูมิ (K) และ y คือ ระยะทางตั้งฉากกับพื้นผิว โดยมีข้อมูล ดังนี้

y, cm	0	1	3	5
T, K	900	480	270	210

หากแผ่นเรียบดังกล่าวยาว 200 cm และกว้าง 50 cm, k = 0.028 W/(m.K) จงคำนวณหาฟลักซ์ความร้อนบนพื้นผิว และปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทรวมทั้งหมด

9. ข้อที่ 35 หน้าที่ 896 ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ ใช้ในการวิเคราะห์คานที่มีแรงกระจายกระทำ

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x), \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI}, \qquad \frac{dM}{dx} = V(x), \qquad \frac{dV}{dx} = -u(x)$$

โดยที่ x คือ ระยะทางตามแนวคาน (m), y คือ ระยะการเสียรูปของคาน (m), $\theta(x)$ = ความชันของการเสียรูป (m/m), E คือ modulus of elastic (Pa), I คือ โมเมนต์ความเฉื่อย (m^4), $M(x)$ คือ โมเมนต์ (N.m), $V(x)$ คือ แรงเฉือน (N) และ $w(x)$ คือ แรงกระจาย (N/m) ในกรณีที่แรงมีการกระจายเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้น ความชันจะสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\theta(x) = \frac{w_0}{120EIL}(-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4)$$

จงคำนวณหา (ก) ค่า y จากวิธี numerical integration (ข) ค่า M และ V จากวิธี numerical differentiation และพล็อตกราฟ M และ V เทียบกับระยะทาง ถ้ากำหนดให้ค่า $\Delta x = 0.125$ m ตลอดความยาวคาน 3 m และ $E = 200$ GPa, $I = 0.0003 m^4$ และ $w_0 = 2.5$ kN/cm ระยะโก่งที่ปลายของคานมีค่าเป็น $y(0) = y(L) = 0$

7. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ: ปัญหาค่าเริ่มต้น

7.1	ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's method)	188
7.2	การปรับปรุงและดัดแปลงระเบียบวิธีของออยเลอร์	194
7.3	ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา (Runge–Kutta method)	202
7.4	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์	211
	แบบฝึกหัดท้ายบท	212

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หรือ Ordinary differential equation เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสามารถแบ่งประเภทได้ตามอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ ความเป็นเชิงเส้นหรือไม่เป็นเชิงเส้นของสมการ และชนิดของเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการคำนวณ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เกี่ยวข้องกับงานด้านวิศวกรรมมักจะเป็นการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับเวลา หรือการเปลี่ยนแปลงของค่าที่สนใจในมิติของตัวแปรอิสระ (ตัวแปรต้น) เพียงมิติเดียว

พิจารณาสมการ

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{7.1}$$

ที่เงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0 \tag{7.2}$$

การคำนวณหาคำตอบของสมการ (7.1) และ (7.2) สามารถทำได้สองวิธีคือการหาค่าปริพันธ์ $f(x,y)$ ด้วยวิธีการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration) และระเบียบวิธีประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยผลต่างแบบจำกัด หากใช้วิธีการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข สมการ (7.1) สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} dy &= f(x,y)dx \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \\ y_{i+1} - y_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \end{aligned} \tag{7.3}$$

$f(x,y)$ สามารถแทนค่าด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนามที่เหมาะสมแล้วจึงหาค่าปริพันธ์ด้วยการหาค่า

ปริพันธ์เชิงตัวเลข ส่วนวิธีที่สองจะทำการแทนค่าเทอมทางซ้ายมือของสมการ (7.1) โดยการประมาณค่าด้วยผลต่างแบบจำกัดแล้วคำนวณหาค่าคำตอบ ถึงแม้ว่าทั้งสองวิธีที่กล่าวมาข้างต้นจะสามารถใช้หาคำตอบได้เหมือนกัน แต่วิธีที่สองจะสะดวกกว่าเพราะทำการประมาณค่าของ y ด้วยความชันของเส้นสัมผัสฟังก์ชันแทนที่จะใช้วิธีการคำนวณพื้นที่ภายใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีที่สองนี้เท่านั้น โดยเริ่มจากการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปสามารถที่อยู่ในรูป

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y}) \tag{7.4}$$

โดยที่ เงื่อนไขเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \begin{Bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{Bmatrix} \tag{7.5}$$

7.1 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's method)

ระเบียบวิธีของออยเลอร์เป็นวิธีแรกสุดที่ใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE's) และยังเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดอีกด้วย แต่ไม่เป็นที่นิยมใช้เนื่องจากมีวิธีอื่นที่มีประสิทธิภาพสูงกว่า อย่างไรก็ตามวิธีนี้ยังให้แนวคิดพื้นฐานของการหาคำตอบของสมการอนุพันธ์เชิงสามัญด้วยวิธีประมาณค่าด้วยผลต่างแบบจำกัด

ระเบียบวิธีของออยเลอร์คำนวณหาผลเฉลยของสมการ (7.1) เป็นค่า $y(x)$ โดยที่ $x > x_0$ และค่าเงื่อนไขเริ่มต้นแสดงได้ดังสมการ (7.2) และถ้าระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ (Step size, h) มีค่าเท่ากัน

$$x_i = x_0 + ih \tag{7.6}$$

และถ้าหาก $x < x_0$ จะได้ว่า

$$x_i = x_0 - ih \tag{7.7}$$

พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด y_i

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2}y''(\xi); x_i < \xi < x_{i+1} \tag{7.8}$$

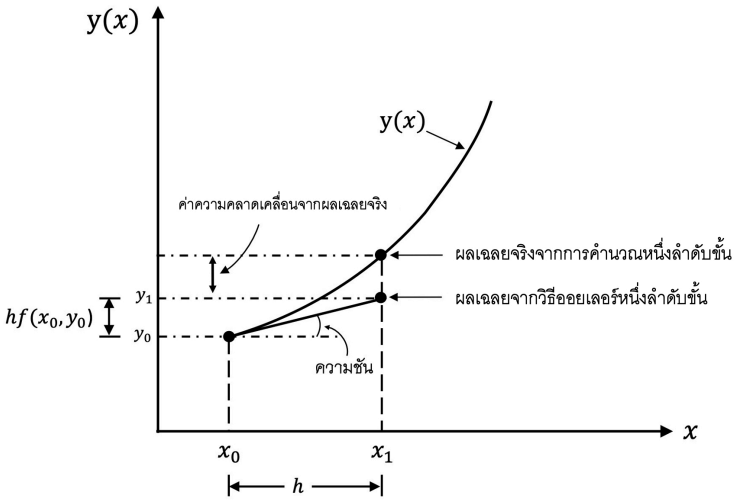
แทนค่าสมการ (7.1) ลงในสมการ (7.8) จะได้ว่า

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi) \tag{7.9}$$

ถ้า h มีค่าน้อยมาก ๆ เทอมของความคลาดเคลื่อนสามารถตัดทิ้งได้ สมการ (7.9) สามารถแสดงได้ดังนี้

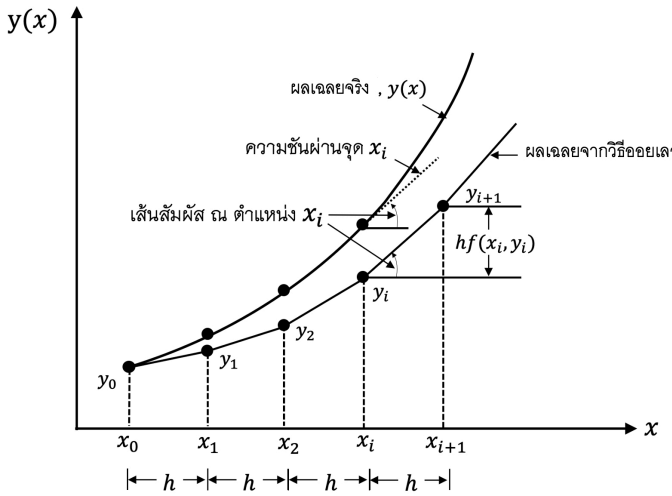
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i); i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.10}$$

สมการ (7.10) เรียกว่าสมการ Euler – Cauchy หรือ Point slope method รูปที่ 7.1 แสดงภาพทางเรขาคณิตของระเบียบวิธีของออยเลอร์ ที่จุด x_0 เส้นสัมผัสที่ $y(x_0)$ จะเป็นเส้นประมาณค่าของ $y(x)$ ในการคำนวณในช่วง $0 \le x \le h$ และสำหรับตำแหน่ง x_i ใด ๆ เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด x_iก็คือความชันของ $f(x_i, y_i)$ จะถูกใช้ในการทำนายค่า y_{i+1}



รูปที่ 7.1: ภาพอธิบายทางเรขาคณิตของระเบียบวิธีของออยเลอร์

ความคลาดเคลื่อนของวิธีนี้จะมีการสะสมไปตามลำกับขั้นการคำนวณ ดังนั้นค่า x_i ที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ผลเฉลยของวิธีนี้ออกห่างจากผลเฉลยจริงไปเรื่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 7.2



รูปที่ 7.2: ค่าความคลาดเคลื่อนที่สะสมจากการคำนวณหลายลำดับขั้นของวิธีออยเลอร์

ตัวอย่าง 7.1. *จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ ในช่วง* $0 \le x \le 1$ *โดยใช้ค่าเริ่มต้น* $y(x=0)=1$

$$y' = y + 2x - 1 \tag{E1}$$

วิธีทำ *แบ่งช่วง* $0 \le x \le 1$ *ออกเป็น* ***10*** *ส่วนเท่า ๆ กัน ดังนั้น* $h = 1/10 = 0.1,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2, \ldots, x_{10} = 1.0$ *และ* $y_0 = 1$ *ดังนั้น*

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i); i = 0, 1, 2, \ldots, 10 \tag{E2}$$

โดยที่ $f(x_i, y_i) = y_i + 2x_i - 1$ *จะได้*

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i + 2x_i - 1); i = 0, 1, 2, \ldots, 10 \tag{E3}$$

สำหรับ $i = 0$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(y_0 + 2x_0 - 1) = 1 + 0.1(1 + 2(0) - 1) = 1.0$$

สำหรับ $i = 1$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(y_1 + 2x_1 - 1) = 1 + 0.1(1 + 2(0.1) - 1) = 1.02$$

ผลเฉลยของวิธีนี้ที่ $h = 0.1,\ h = 0.05,$ *และ* $h = 0.01$ *แสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้*

x_i	*Value of* y_i						*Exact Solution*
	$h = 0.1$	*Error*	$h = 0.05$	*Error*	$h = 0.01$	*Error*	y_i
0.0	-	-	-	-	-	-	*1.0*
0.1	*1.000000*	*0.010342*	*1.005000*	*0.005342*	*1.009245*	*0.001096*	*1.0103426*
0.2	*1.020000*	*0.022806*	*1.031012*	*0.011794*	*1.040382*	*0.002424*	*1.0428066*
0.3	*1.062000*	*0.037717*	*1.080190*	*0.019527*	*1.095701*	*0.004016*	*1.0997181*
0.4	*1.128200*	*0.055449*	*1.154911*	*0.028739*	*1.177731*	*0.005918*	*1.1836500*
0.5	*1.221020*	*0.076422*	*1.257789*	*0.039653*	*1.289266*	*0.008176*	*1.2974434*
0.6	*1.343122*	*0.101114*	*1.391713*	*0.052524*	*1.433396*	*0.010841*	*1.4442368*
0.7	*1.497434*	*0.130070*	*1.559864*	*0.067642*	*1.613529*	*0.013976*	*1.6275053*
0.8	*1.687178*	*0.163903*	*1.765749*	*0.085331*	*1.833431*	*0.017650*	*1.8510818*
0.9	*1.915896*	*0.203310*	*2.013238*	*0.105967*	*2.097266*	*0.021940*	*2.1192064*
1.0	*2.187485*	*0.249077*	*2.306595*	*0.129967*	*2.409627*	*0.026935*	*2.4365635*

7.1.1 ผลเฉลยจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

จากสมการ (7.3) จะเห็นได้ว่า

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \tag{7.11}$$

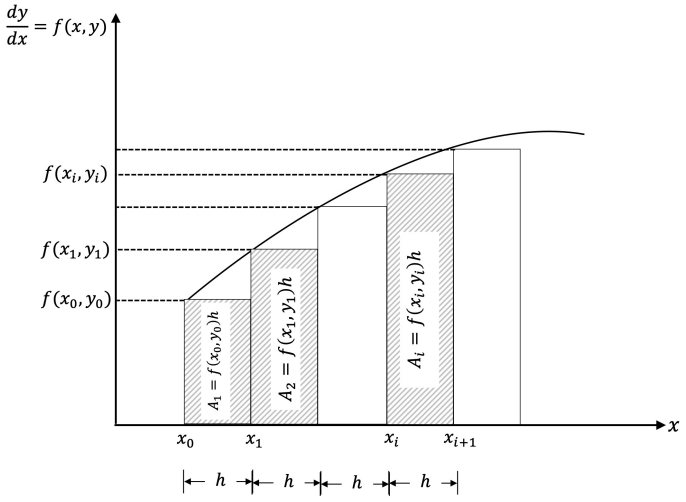
สมการ (7.11) แสดงให้เห็นว่าผลเฉลยของ y_{i+1} ได้มาจากการนำพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x,y)$ จาก $x = x_i$ ถึง $x = x_{i+1}$ มาบวกกับเทอม y_i ถ้าหากสมมติว่าค่า $f(x,y)$ เป็นค่าคงที่ที่มีค่าเท่ากับ $f(x_i,y_i)$ ในช่วงจาก $x = x_i$ ถึง $x = x_{i+1}$ จะได้ว่า

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \approx f(x_i,y_i)(x_{i+1} - x_i) = hf(x_i,y_i) \tag{7.12}$$

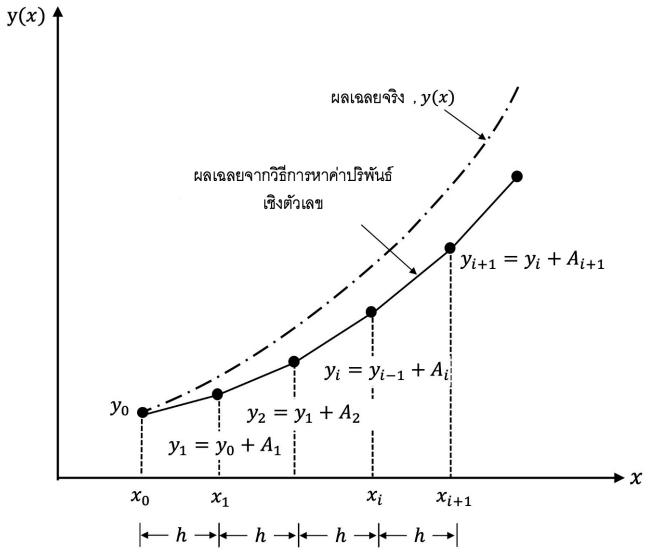
หรือ

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{7.13}$$

ผลเฉลยที่ได้จากสมการ (7.13) แสดงได้ดังรูป 7.3(ก) จะเห็นได้ว่าผลเฉลยจากสมการ (7.10) จะคำนวณได้สะดวกกว่าผลเฉลยจาก (7.11)



(ก)



(ข)

รูปที่ 7.3: ผลเฉลยจากการใช้วิธีการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (ก) กราฟิกแสดงการคำนวณหาพื้นที่ใต้กราฟที่ใช้ในการคำนวณ (ข) เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้ระหว่างผลเฉลยจริง และผลเฉลยจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

7.1.2 ผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

วิธีการคำนวณหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สมการเดี่ยวสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ n สมการ

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); y_1(x_0) = y_{1,0} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); y_2(x_0) = y_{2,0} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); y_n(x_0) = y_{n,0} \tag{7.16}$$

ระเบียบวิธีของออยเลอร์สามารถหาคำตอบของระบบสมการที่ตำแหน่ง x_{i+1} จากค่าที่รู้จากตำแหน่ง x_i ได้ดังนี้

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{n,i}) \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} y_{2,i+1} &= y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{n,i}) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7.18}$$

และ

$$y_{n,i+1} = y_{n,i} + hf_n(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{n,i}) \tag{7.19}$$

สมการ (7.17) ถึงสมการ (7.19) แสดงให้เห็นว่า ค่า $y_{1,i+1}, y_{2,i+1}, \ldots, y_{n,i+1}$ สามารถคำนวณได้จากค่า $y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{n,i}$ ณ ตำแหน่ง $x_i (i = 0)$ ซึ่งเป็นค่าตำแหน่งเริ่มต้น

7.1.3 ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีออยเลอร์

ความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีอยู่สองชนิดคือ ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Round-off error) และความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error) ในกรณีระเบียบวิธีของออยเลอร์นั้น ความคลาดเคลื่อนจะมาจากความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย ซึ่งเกิดจากการตัดเทอมที่มีอันดับสูงในอนุกรมเทย์เลอร์ที่ใช้ในสมการที่ (7.8) ทิ้งไป ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายมีอยู่สองแบบคือ ค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ (Local truncation error) เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณในแต่ละขั้นของการคำนวณ แบบที่สองคือ ค่าความคลาดเคลื่อนต่อเนื่อง (Propagation truncation error) เป็นความคลาดเคลื่อนที่สะสมมาจากการคำนวณในขั้นตอนที่ผ่านมา ผลรวมของค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ และ ค่าความคลาดเคลื่อนต่อเนื่อง เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนรวม (Total error) ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของ

วิธีออยเลอร์สามารถประมาณจากพิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $y(x_i)$ รอบจุด x_i ได้ว่า

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\frac{dy}{dx}\Big|_{x_i} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x_i} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}\Big|_{x_i} + \cdots \tag{7.20}$$

และการประมาณค่าผลเฉลยจากระเบียบวิธีของออยเลอร์คือ

$$\bar{y}_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) \tag{7.21}$$

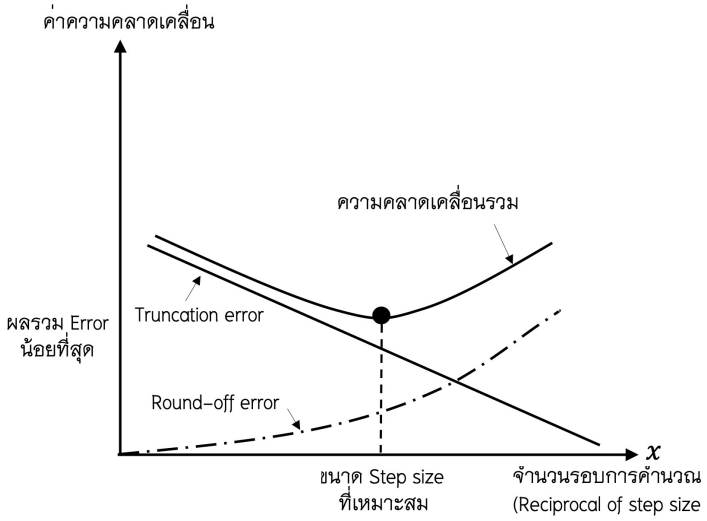
นำสมการ (7.21) ลบออกจากสมการ (7.20) จะได้ความเคลื่อนของการประมาณค่า $\frac{dy}{dx}|_{x_i} = f(x_i, y(x_i))$ คือ

$$y(x_{i+1}) - \bar{y}_{i+1} = \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x_i} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}\Big|_{x_i} + \cdots \tag{7.22}$$

สมการ (7.22) แสดงให้เห็นว่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายต่อหนึ่งขั้นการคำนวณเป็น $O(h^2)$ และหากมีการคำนวณเป็นจำนวน $i+1$ ขั้น ซึ่งจะเท่ากับ (x_{i+1}/h) ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายจะเป็น $O(h)$ ซึ่งเป็นออเดอร์แรกของ h ดังนั้น ระเบียบวิธีของออยเลอร์จึงจัดว่าเป็นระเบียบวิธีอันดับที่หนึ่ง (First-order method) ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของวิธีออยเลอร์สามารถลดลงได้โดยการใช้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ (h) ที่มีขนาดเล็กลง แต่จำนวนขั้นของการคำนวณก็จะเพิ่มขึ้นด้วย อันจะมีผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษมีค่ามากขึ้น รูป 7.4 แสดงให้เห็นว่าจะมีจุดเหมาะสมของการกำหนดค่าระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณที่ให้ค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย และความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ มีค่าต่ำสุดอยู่ แต่ในความเป็นจริงแล้วจุดเหมาะสมนี้ไม่สามารถกำหนดแน่นอนได้ วิธีที่ดีที่สุดในการหาจุดเหมาะสมคือการปรับลดค่าระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณลงจนกว่าค่าของผลลัพธ์ที่ได้ ระหว่างสองค่าระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณติดกันจะมีความแตกต่างกันน้อยมาก

7.2 การปรับปรุงและดัดแปลงระเบียบวิธีของออยเลอร์

ระเบียบวิธีของออยเลอร์เป็นวิธีที่ง่าย แต่ต้องใช้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ (h) ที่มีขนาดเล็กจึงจะได้ความแม่นยำที่สามารถยอมรับได้ ถ้าหากต้องการคำนวณหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงสามัญ ในช่วงของ x ที่กว้างมาก ๆ ก็จะทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรในการคำนวณมาก อีกทั้งการสะสมของความคลาดเคลื่อนที่อาจจะนำไปสู่พฤติกรรมที่คาดเดาไม่ได้ของระเบียบวิธีของออยเลอร์ ดังนั้นจึงได้มีการดัดแปลงระเบียบวิธีของออยเลอร์ให้มีความถูกต้องสูงขึ้น และมีความเสถียรมากขึ้น ดังจะได้กล่าวต่อไป



รูปที่ 7.4: ค่าของความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ และความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายที่ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณต่าง ๆ

7.2.1 การใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับสูงขึ้น

เนื่องจากระเบียบวิธีของออยเลอร์ได้มาจากการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ที่ตัดเทอมตั้งแต่อันดับที่สองขึ้นไปทิ้ง เพราะฉะนั้นการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ที่มีอันดับสูงขึ้นจึงเป็นวิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีของออยเลอร์วิธีหนึ่ง ถ้าพิจารณาการใช้อนุกรมเทย์เลอร์จำนวน n เทอม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_{x_{i+1}} =& y_{x_i} + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) \\ &+ \cdots + \frac{h^n}{n!}y^n(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{n+1}(\xi); x_i < \xi < x_{i+1} \end{aligned} \tag{7.23}$$

เทอมสุดท้ายของ (7.23) คือค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายส่วนอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของสมการ (7.23) สามารถหาค่าโดยอาศัยกฎลูกโซ่ (Chain rule) ได้ดังนี้

$$y'(x) = f(x,y) \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned} y''(x) = \frac{d[y'(x)]}{dx} &= \frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}f(x,y) = f'(x,y) \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$y'''(x) = \frac{df'(x,y)}{dx} \equiv f''(x,y) \tag{7.26}$$

$$\vdots$$

และ

$$y^{(n)}(x) = f^{n-1}(x,y) \tag{7.27}$$

แทนค่า (7.24) ถึง (7.23) ลงในสมการ (7.23) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_{x_{i+1}} =& y_{x_i} + hf(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i,y_i) + \frac{h^3}{3!}f''x_i,y_i) \\ &+ \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{n-1}(x_i,y_i) \end{aligned} \tag{7.28}$$

จากการใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ n ดังสมการ (7.28) ก็จะสามารถคำนวณสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y(x_0) =& y_0 \text{ (initial condition)} \\ y_{i+1} =& y_i + hf(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i,y_i) + \frac{h^3}{3!}f''x_i,y_i) \\ &+ \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{n-1}(x_i,y_i) \end{aligned} \tag{7.29}$$

ตามหลักวิธีข้างต้นนี้ จะกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีของออยเลอร์คือการใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่หนึ่งนั่นเอง ส่วนค่าความเคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ n คือ $O(h^{n+1})$

ตัวอย่าง 7.2. *จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์*

$$y' = y + 2x - 1 \tag{E1}$$

ในช่วง $0 \le x \le 1$ *โดยที่* $y(x=0) = 1$

วิธีทำ *แบ่งช่วงของ* x *ออกเป็น* ***10*** *ช่วง จะได้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ* $h = 0,1$, $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.1,\ldots,x_{10} = 1.0$ *และ* $y_0 = 1.0$ *ค่า* $y_1,y_2,\ldots,y_{10}$ *สามารถคำนวณด้วยระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำจากสมการ* (7.29) *โดยที่*

$$f(x,y) = y + 2x - 1 \tag{E2}$$

ดังนั้น

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 2 + (y + 2x - 1) = y + 2x + 1 \tag{E3}$$

$$f'' = \frac{df'}{dx} = \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial y}y' = \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial y}f$$
$$= 2 + (y + 2x - 1) = y + 2x + 1 \tag{E4}$$

และ

$$f''' \frac{\partial f''}{\partial x} + \frac{\partial f''}{\partial y}y' = \frac{\partial f''}{\partial x} + \frac{\partial f''}{\partial y}f$$
$$= 2 + (y + 2x - 1) = y + 2x + 1 \tag{E5}$$

ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ใช้อันดับที่ 1

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h(y_i + 2x_i - 1) \tag{E6}$$

ใช้อันดับที่ 2

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i)$$
$$= y_i + h(y_i + 2x_i - 1) + \frac{h^2}{2!}(y_i + 2x_i + 1) \tag{E7}$$

ใช้อันดับที่ 3

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i, y_i)$$
$$= y_i + h(y_i + 2x_i - 1) + \frac{h^2}{2!}(y_i + 2x_i + 1) + \frac{h^3}{6}(y_i + 2x_i + 1) \tag{E8}$$

ใช้อันดับที่ 4

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i, y_i) + \frac{h^4}{4!}f'''(x_i, y_i)$$
$$= y_i + h(y_i + 2x_i - 1) + \frac{h^2}{2!}(y_i + 2x_i + 1)$$
$$+ \frac{h^3}{6}(y_i + 2x_i + 1) + \frac{h^4}{24}(y_i + 2x_i + 1) \tag{E9}$$

สมการ (E9) *ให้ผลเฉลยดังแสดงในตารางต่อไปนี้*

	ผลเฉลยเชิงตัวเลข y_i				ผลเฉลยจริง
x_i	อันดับที่ 1	อันดับที่ 2	อันดับที่ 3	อันดับที่ 4	y_i
0.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.10	1.0000000	1.0100002	1.0103340	1.0103426	1.0103426
0.20	1.0200005	1.0420504	1.0427876	1.0428066	1.0428066
0.30	1.0620003	1.0984650	1.0996876	1.0997190	1.0997181
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.70	1.4974346	1.6231470	1.6273994	1.6275053	1.6275053
0.80	1.6871786	1.8455772	1.8509474	1.8510818	1.8510818
0.90	1.9158964	2.1123629	2.1190395	2.1192055	2.1192064
1.00	2.1874857	2.4281607	2.4363594	2.4365625	2.4365635

7.2.2 ระเบียบวิธีของฮวน (Heun's method)

ในระเบียบวิธีของออยเลอร์นั้น ค่า $f(x,y)$ ที่เป็นค่าของ (dy/dx) จะถูกคำนวณที่ตำแหน่งเริ่มต้นของช่วงระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ, h และถูกสมมติว่ามีค่าคงที่ตลอดช่วง ซึ่งสมมติฐานนี้เป็นสาเหตุหลักของความคลาดเคลื่อน เนื่องจากความเป็นจริงแล้วอนุพันธ์ (dy/dx) เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่าง ๆ ในช่วงของ h ระเบียบวิธีของฮวน จะคำนวณค่า (dy/dx) โดยใช้ค่าเฉลี่ยระหว่างตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายของช่วง h ดังนั้น ระเบียบวิธีของฮวนมีดังนี้

1. เริ่มต้นจากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น, $y(x_0) = y_0$
2. สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots$ คำนวณหาค่าความชัน, $f(x_i, y_i)$
3. คำนวณค่า $y_{i+1}^{(0)}$ จาก

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{7.30}$$

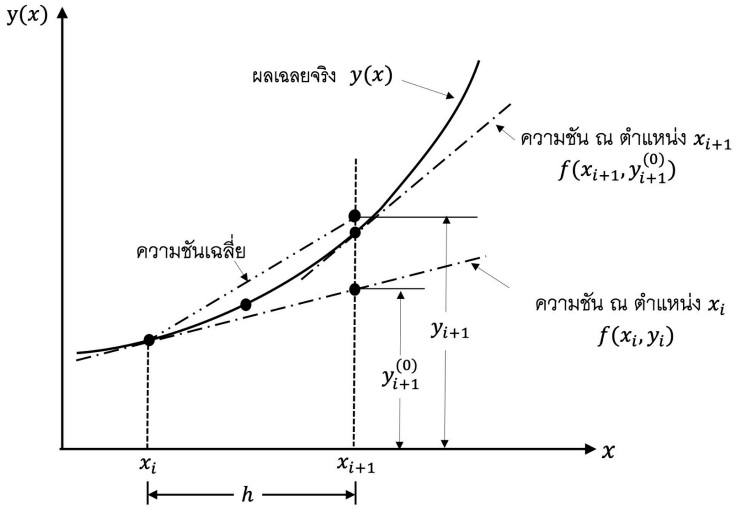
4. คำนวณค่าความชันที่จุด x_{i+1} จาก

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) \tag{7.31}$$

5. หาค่าของ y ที่ x_{i+1} จาก

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})}{2}\right] \tag{7.32}$$

จะเห็นได้ว่า ค่า $y_{i+1}^{(0)}$ ที่คำนวณได้จากสมการ (7.30) ยังไม่ใช่ผลเฉลยสุดท้ายของค่า y_{i+1} แต่เป็นค่าที่ใช้สำหรับประมาณค่าความชัน (dy/dx) ที่ตำแหน่งสิ้นสุดของช่วง h สมการ (7.30) สามารถเรียกได้ว่าเป็นสมการทำนาย (Predictor equation) และค่าเฉลี่ยของความชันระหว่างตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} จะถูกใช้ในการประมาณค่า y ที่ x_{i+1} ในสมการที่ (7.32) ซึ่งสามารถเรียกได้ว่าเป็นสมการแก้ไข (Corrector equation) เพราะฉะนั้น ระเบียบวิธีของฮวนจึงเป็นวิธีแบบทำนาย–แก้ไข (Predictor–corrector) อย่างง่ายชนิดหนึ่ง ดังแสดงในรูปที่ 7.5



รูปที่ 7.5: กราฟแสดงการหลักการคำนวณของระเบียบวิธีของฮวน

ระเบียบวิธีของฮวนสามารถปรับปรุงได้โดยการดัดแปลงสมการแก้ไข (7.32) ดังนี้

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + h\left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})}{2}\right]; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.33}$$

แล้วใช้สมการ (7.33) ทำการคำนวณวนซ้ำจนกระทั่ง

$$\left|\frac{y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}}{y_{i+1}^{(k)}}\right| \leq \epsilon \tag{7.34}$$

โดยที่ ϵ มีค่าน้อยมาก ๆ ก็จะได้ผลเฉลยของ y

ตัวอย่าง 7.3. *จงคำนวณหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้ ด้วยระเบียบวิธีของฮวนในช่วง* $0 \le x \le 1$

$$y' = -5y + e^{-2x}; y(0) = 1.0 \tag{E1}$$

วิธีทำ *แบ่งช่วง* $0 \le x \le 1$ *ออกเป็น* ***10*** *ช่วง จะได้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ,* $h = 0,1$ *จะได้* $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.1, \ldots, x_{10} = 0.1$ *และ* $y_0 = 1.0$ *ดังนั้นใช้ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำ (Iterative process)*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\{f_i + f(x_i + h, y_i + hf_i)\} \tag{E2}$$

ผลเฉลยจากระเบียบวิธีของฮวนเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง (สมการ (E3)*) แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้*

x_i	y_i *จากวิธีของ Huen's*	*ผลเฉลยจริง*
0.00	*1.0000000*	*1.0000000*
0.10	*0.6909364*	*0.6772639*
0.20	*0.4858195*	*0.4686931*
⋮	⋮	⋮
0.80	*0.0840744*	*0.0795092*
0.90	*0.0658588*	*0.0625056*
1.00	*0.0520610*	*0.0496037*

สมการของผลเฉลยจริงคือ

$$y(x) = \frac{1}{3}(e^{-2x} + 2e^{-5x}) \tag{E3}$$

ความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีของฮวนสามารถพิจารณาได้จาก

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi); x_i < \xi < x_{i+1} \tag{7.35}$$

ประมาณค่า y_i'' ด้วยผลต่างไปข้างหน้า

$$y_i'' = y''(x_i) = \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h} \tag{7.36}$$

เขียนสมการ (7.35) ใหม่ได้

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{y'_{i+1} - y'_i}{h}\right) + O(h^3) \tag{7.37}$$

จากสมการ (7.37) ค่า $y'_i = f(x_i, y_i)$ และ $y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ จะเป็นสมการเดียวกับ (7.32) และ (7.33) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีของฮวนมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะจุดเป็นอันดับของ $O(h^3)$ ซึ่งมีความแม่นยำกว่าระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่มีความคลาดเคลื่อนเฉพาะจุดเป็นอันดับของ $O(h^2)$ เพราะฉะนั้นระเบียบวิธีของฮวนจึงเป็นวิธีที่มีอันดับเท่ากับสอง

7.2.3 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (Improved or modified Euler's)

ระเบียบวิธีของออยเลอร์สามารถปรับปรุงได้อีกแบบหนึ่งด้วยการใช้ค่า (dy/dx) ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของช่วง h หรือที่ $x = x_i + (h/2)$ ดังนั้น ระเบียบวิธีของออยเลอร์จึงจะถูกนำมาใช้ในการหาค่า y ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของช่วงการคำนวณ โดย

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i) \tag{7.38}$$

ต่อจากนั้น นำค่า $y_{i+\frac{1}{2}}$ มาหาค่า (dy/dx) จาก

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \tag{7.39}$$

สุดท้ายความชันที่ได้จากสมการ (7.39) จะถูกใช้ไปคำนวณหาค่า y_{i+1} ด้วยระเบียบวิธีของออยเลอร์อีกครั้งดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \tag{7.40}$$

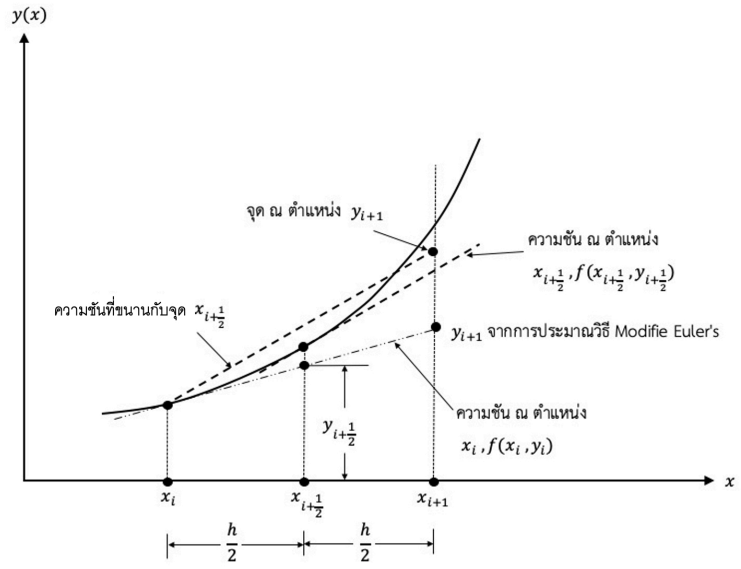
เนื่องจาก y_{i+1} ไม่ปรากฏในด้านขวาของสมการ (7.40) ดังนั้น วิธีนี้จึงไม่สามารถปรับปรุงต่อด้วยระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำได้ รูปที่ 7.6 แสดงให้เห็นรายละเอียดของระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วจะเห็นได้ว่าวิธีนี้มีความแม่นยำกว่าระเบียบวิธีของออยเลอร์ ซึ่งเป็นผลมาจากการใช้ค่าสโลปที่จุดกึ่งกลางช่วง h และระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วนี้ จะมีความคลาดเคลื่อนเฉพาะจุดเท่ากับระเบียบวิธีของฮวน คือ $O(h^3)$

ตัวอย่าง 7.4. *จงคำนวณสมการต่อไปนี้ด้วยระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วในช่วง* $0 \le x \le 1$

$$y' = -5y + e^{-2x}; y(0) = 1.0 \tag{E1}$$

วิธีทำ *จากสมการ*

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf_i\right) \tag{E2}$$



รูปที่ 7.6: กราฟแสดงการคำนวณของระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว

ให้ $h = 0.1$, $y_0 = 1.0$ *และ* $x_i = i(0.1)$ *จะได้ ผลเฉลยดังตารางต่อไปนี้*

x_i	y_i *จากวิธีเชิงตัวเลข*	*ผลเฉลยจริง*
0.00	*1.0000000*	*1.0000000*
0.10	*0.6904836*	*0.6772639*
0.20	*0.4851658*	*0.4686931*
⋮	⋮	⋮
0.80	*0.0836568*	*0.0795092*
0.90	*0.0655065*	*0.0625056*
1.00	*0.0517659*	*0.0496037*

7.3 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา (Runge–Kutta method)

การใช้อนุกรมเทย์เลอร์ที่มีอันดับสูงขึ้นถึงแม้ว่าจะมีค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายน้อย แต่มีขั้นตอนการคำนวณมากในส่วนอนุพันธ์ของ $f(x, y)$ ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา ไม่ต้องคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของ $f(x, y)$ แต่จะ

ให้ความแม่นยำเทียบเท่ากับการใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับสูง อย่างไรก็ตามข้อเสียของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา คือ การคำนวณค่า $f(x,y)$ หลาย ๆ ครั้งในแต่ละช่วงของการหาค่าปริพันธ์ ซึ่งจะมีผลต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ สมการทั่วไปของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาสามารถเขียนได้ดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + h\alpha(x_i, y_i, h) \tag{7.41}$$

ฟังก์ชัน $\alpha(x_i, y_i, h)$ เรียกว่า ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Increment function) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของความชันในช่วง $x_i \le x_{i+1}$

$$\alpha(x_i, y_i, h) = c_1k_1 + c_2k_2 + \cdots + c_nk_n \tag{7.42}$$

โดยที่ n เป็นอันดับของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงที่ และ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ คือ

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{7.43}$$

$$k_2 = f(x_i + p_2h, y_i + a_{21}hk_1) \tag{7.44}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(x_i + p_3h, y_i + a_{31}hk_1 + a_{32}hk_2) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7.45}$$

และ

$$k_n = f(x_i + p_nh, y_i + a_{n1}hk_1 + a_{n2}hk_2 + \cdots + a_{n,n-1}hk_{n-1}) \tag{7.46}$$

จากสมการ (7.43) ถึง (7.46) สังเกตุว่า k_1 ปรากฏอยู่ในสมการของ k_2, และ k_2 ปรากฏอยู่ในสมการของ k_3 เป็นอย่างนี้ไปเรื่อย ๆ ความสัมพันธ์แบบนี้ เรียกว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relation) และสมการ (7.41) ถึง (7.46) สามารถเขียนให้สั้นลงได้ว่า

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{n} c_jk_j \tag{7.47}$$

โดยที่

$$k_j = f\left(x_i + p_jh, y_i + \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}k_l\right) \tag{7.48}$$

7.3.1 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่หนึ่ง (First-order Runge–Kutta)

สำหรับ $n = 1$ สมการ (7.47) และ (7.48) จะเท่ากับ

$$y_{i+1} = y_i + hc_1k_1$$

และ

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{7.49}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{7.50}$$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $c = 1$ ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่หนึ่งก็คือ ระเบียบวิธีของออยเลอร์นั่นเอง

7.3.2 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง (Second–order Runge-Kutta)

ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับใด ๆ ก็ตาม จะมีวิธีคำนวณอยู่ 6 ขั้นตอนหลัก ๆ ดังนี้

1. เลือกอันดับของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา, n สำหรับระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง $n = 2$ ใช้อนุกรมเทย์เลอร์หาค่า y_{i+1} โดยใช้จำนวน $(n+1)$ เทอม

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2}y_i'' + O(h^3) \tag{7.51}$$

2. แทนค่าอนุพันธ์ของ y ในสมการที่ (7.51) ด้วย

$$y_i' = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f(x_i, y_i) \equiv f_i \tag{7.52}$$

และ

$$y_i'' = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_i} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\right|_{x_i} \equiv (f_x + f_y f)_i \tag{7.53}$$

3. แทนค่าสมการ (7.52) และ (7.53) ใน (7.51) จะได้

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}f_{xi} + \frac{h^2}{2}f_i f_{yi} + O(h^3) \tag{7.54}$$

4. แสดงสมการ (7.47) โดยใช้จำนวน n เทอมจะได้

$$y_{i+1} = y_i + hc_1k_1 + hc_2k_2 \tag{7.55}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{7.56}$$

และ

$$k_2 = f(x_i + p_2 h, y_i + a_{21} h k_1) \tag{7.57}$$

5. นำอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับสองตัวแปรมาใช้กับฟังก์ชัน f ในสมการ (7.57)

$$f(x_i + p_2 h, y_i + a_{21} h k_1) = k_2 = f_i + p_2 h f_{xi} + a_{21} h f_{yi} f_i + O(h^2) \tag{7.58}$$

ซึ่งก็คือ

$$y_{i+1} = y_i + h f_i (c_1 + c_2) + h^2 f_{xi} (c_2 p_2) + h^2 f_i f_{yi} (c_2 a_{21}) + O(h^3) \tag{7.59}$$

6. เนื่องจากสมการ (7.54) และ (7.59) เป็นสมการแสดงค่า y_{i+1} ทั้งสองสมการ ดังนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละเทอมจะมีค่าเท่ากัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_2 p_2 &= \frac{1}{2} \\ c_2 a_{21} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{7.60}$$

จะเห็นว่าสมการ (7.60) มีจำนวนตัวแปรที่ไม่รู้ค่าอยู่สี่ตัว คือ c_1, c_2, p_2 และ a_{21} แต่มีสมการเพียงแค่สามสมการ ดังนั้น ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง จึงมีดีกรีอิสระเท่ากับหนึ่ง ทำนองเดียวกัน ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สาม (Third–Order Runge–Kutta) และ ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สี่ (Fourth–order Runge–Kutta) ก็จะมีดีกรีอิสระเท่ากับสอง ส่วนระเบียบวิธีของรุงเง- คุตตาอันดับที่ห้า (Fifth–order Runge–Kutta) ก็จะมีดีกรีอิสระอย่างน้อยห้า เป็นต้น การที่มีตัวแปรที่ไม่รู้ค่ามากกว่าจำนวนสมการนั้น ทำให้สมการ (7.60) ไม่ได้มีคำตอบเดียว จึงจำเป็นต้องกำหนดค่าให้กับตัวที่ไม่รู้ค่าบางตัวก่อน เพื่อที่จะหาค่าของตัวไม่รู้ค่าตัวอื่น ๆ ได้ จากจำนวนสมการที่มีทำให้ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่ n (nth–order Runge–Kutta) มีได้หลายรูปแบบ

สำหรับระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง เลือกที่จะกำหนดค่า c_2 ทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์

$$c_1 = 1 - c_2, p_2 = \frac{1}{2c_2}, a_{21} = \frac{1}{2c_2} \tag{7.61}$$

ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง สามแบบที่นิยมใช้กันมากที่สุดมีดังนี้

ระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (Modified or improved Euler)

พิจารณาให้ $c_2 = 1$ จากสมการ (7.61) จะได้ $c_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{2}$ และ $a_{21} = \frac{1}{2}$ ผลเฉลยของสมการ (7.55) ถึง (7.57) คือ

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hk_2 \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \end{aligned} \tag{7.62}$$

สมการ (7.62) แสดงให้เห็นว่าเวอร์ชันนี้ของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง ก็คือระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว นั่นเอง

ระเบียบวิธีของฮวน

พิจารณาให้ $c_2 = \frac{1}{2}$ จากสมการ (7.61) จะได้ $c_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 1$ และ $a_{21} = 1$ ผลเฉลยของสมการ (7.55) ถึง (7.57) คือ

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + h, y_i + hk_1\right) \end{aligned} \tag{7.63}$$

จะเห็นได้ว่าวิธีนี้ของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง คือระเบียบวิธีของฮวน นั่นเอง

ระเบียบวิธีของราลส์ตัน (Ralston's method)

พิจารณาให้ $c_2 = \frac{2}{3}$ สมการ (7.61) จะได้ $c_2 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{3}{4}$ และ $a_{21} = \frac{3}{4}$ ผลเฉลยจากสมการ (7.55) ถึง (7.57) คือ

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{3}h(k_1 + 2k_2) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hk_1\right) \end{aligned} \tag{7.64}$$

7.3.3 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สาม

สำหรับระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สาม $n = 3$ ด้วยวิธีการเดียวกันกับที่กล่าวมาข้างต้น จะได้สมการทั้งหมด 6 สมการ และมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ 8 ตัว ดังนั้น ต้องกำหนดค่าให้กับตัวไม่รู้ค่าก่อน 2 ตัว จึงจะหาค่าที่เหลือได้ ซึ่งแบบที่นิยมใช้มากที่สุดของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สาม คือ

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2\right) \end{aligned} \tag{7.65}$$

ถ้าหาก $f(x, y)$ ขึ้นอยู่กับตัวแปร x เพียงอย่างเดียว ก็จะพบว่าระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สามก็คือ ระเบียบวิธีของซิมป์สัน 1/3 ในหัวข้อของการอินทิเกรตเชิงตัวเลขนั่นเอง

7.3.4 ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สี่

ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สี่ มีความแม่นยำอยู่ในอันดับของ $O(h^4)$ จึงเป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด วิธีนี้ก็สามารถทำได้หลายแบบด้วยกัน แต่แบบที่นิยมใช้มากที่สุด คือ

ระเบียบวิธีของรุงเง (Runge's method)

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right) \end{aligned} \tag{7.66}$$

ระเบียบวิธีของคุตตา (Kutta's method)

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{8}h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{1}{3}hk_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i - \frac{1}{3}hk_1 + hk_2\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3\right)
\end{aligned}
\tag{7.67}
$$

ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา–กิล (Runge–Kutta–Gill's method)

วิธีนี้เป็นแบบที่นิยมใช้มากที่สุด โดยที่

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h\left[k_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3 + k_4\right] \\
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{1}{\sqrt{2}}hk_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_3\right)
\end{aligned}
\tag{7.68}
$$

ตัวอย่าง 7.5. *จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ด้วยระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สี่ในช่วง* $0 \le x \le 1$

$$y' = y + 2x - 1; y(0) = 1.0 \tag{E1}$$

วิธีทำ *แบ่งช่วง* $0 \le x \le 1$ *ออกเป็น* ***10*** *ช่วง โดยที่* $x_0 = 0.0, x_1 = 0.1, \ldots,$ *และ* $x_{10} = 1.0$ *ด้วยระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ* $h = 0.1$ *และ* $y_0 = y(x = 0) = 1.0$ *จากนั้นใช้สมการ* (7.66) *ถึง* (7.68) *ในการคำนวณจะได้ผลเฉลยมาดังตารางต่อไปนี้*

x_i	Value of y_i			Exact Solution
	Runge 1	Kutta 2	Runge-Kutta-Gill	y_i
0.00	1.0	1.0	1.0	1.0
0.10	1.01034164	1.01034164	1.01034164	1.01034260
0.20	1.04280472	1.04280472	1.04280472	1.04280663
0.30	1.09971619	1.09971619	1.09971619	1.09971619
0.40	1.18364716	1.18364811	1.18364811	1.18365002
0.50	1.29743958	1.29744053	1.29744148	1.29744339
0.60	1.44423389	1.44423485	1.44423580	1.44423676
0.70	1.62750149	1.62750244	1.62750340	1.62750530
0.80	1.85107708	1.85107803	1.85107994	1.85108185
0.90	2.11920071	2.11920166	2.11920357	2.11920643
1.00	2.43655777	2.43655777	2.43656063	2.43656349

7.3.5 การประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาด้วยระเบียบวิธีประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน

ถ้าหาก $y_{i+1}^{(1)}$ และ $y_{i+1}^{(2)}$ เป็นค่าที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาที่ใช้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณต่างกันสองค่า คือ $h_1 = h$ และ $h_2 = (h/2)$ ตามลำดับ ถ้าผลเฉลยจริงของสมการอนุพันธ์ที่ตำแหน่ง $x = x_{i+1}$ คือ $\bar{y}_{i+1}$ เราสามารถใช้ระเบียบวิธีประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน (Richardson extrapolation) จะได้

$$\bar{y}_{i+1} = \frac{y_{i+1}^{(1)} - 2^n y_{i+1}^{(2)}}{1 - 2^n} \tag{7.69}$$

สมการ (7.69) จะให้ผลเป็นการประมาณค่าที่แม่นยำขึ้น และสามารถใช้คำนวณหาความคลาดเคลื่อนเฉพาะจุดได้ดังนี้

$$e = \bar{y}_{i+1} - y_{i+1}^{(1)} = \frac{2^n \left(y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)} \right)}{2^n - 1} \tag{7.70}$$

และ

$$\begin{aligned} e &= \frac{4}{3}\left(y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)} \right) \text{ สำหรับระเบียบวิธีอันดับที่สอง} \\ &= \frac{8}{7}\left(y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)} \right) \text{ สำหรับระเบียบวิธีอันดับที่สาม} \\ &= \frac{16}{15}\left(y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)} \right) \text{ สำหรับระเบียบวิธีอันดับที่สี่} \end{aligned} \tag{7.71}$$

สมการ (7.71) สามารถนำไปใช้ในการหาระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ สูงสุด ($h_{\max}$) ที่ความแม่นยำ ϵ ได้ดังนี้

$$h_{\max} \leq h_1 \left\{ \frac{\epsilon(2^n - 1)}{2^n \left(y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)} \right)} \right\}^{\frac{1}{n+1}} \tag{7.72}$$

การใช้สมการ (7.72) เพื่อปรับระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ ในการคำนวณเพื่อให้ได้ความแม่นยำที่ต้องการ อย่างไรก็ตามการคำนวณในสมการ (7.72) จะสิ้นเปลืองขั้นตอนและเวลาในการคำนวณมากจึงจะไม่นิยมปรับระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณด้วยสมการ (7.72) ในทุก ๆ ลำดับของการคำนวณ แต่ละใช้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณค่าหนึ่ง (h_1) ไปจำนวน m steps ก่อน แล้วค่อยทำการปรับค่าใหม่ ส่วนค่าของจำนวนขั้นการคำนวณ m สามารถเลือกค่าได้ตามความเหมาะสม

7.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n^{th} ใด ๆ สามารถแสดงในรูปของระบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งจำนวน n สมการได้ ดังนี้

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(\vec{y}, x) \tag{7.73}$$

โดยที่

$$\vec{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{Bmatrix}, \vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{Bmatrix}, \vec{y}_0 = \begin{Bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ . \\ . \\ . \\ y_{n,0} \end{Bmatrix}$$

รวมถึงระบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง ๆ ก็สามารถเขียนได้ในรูปของสมการ (7.73) ได้ด้วยเช่นกัน เพราะฉะนั้นวิธีทุกวิธีที่กล่าวมาในบทนี้ สามารถนำมาใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการ (7.73) โดยการใช้ $\vec{y}$ และ $\vec{f}$ แทนค่า y และ f ตามลำดับ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 1$ ด้วย ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ เท่ากับ 0.25 โดยที่ $y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2x)\sqrt{y}$$

ด้วย (ก) ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's) (ข) ระเบียบวิธีของฮวน Huen's (ค) ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา อันดับที่สอง และ พล็อตกราฟของผลเฉลยที่ได้ทั้งหมดเปรียบเทียบกับคำตอบจริง

2. จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ ด้วยระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สี่ ในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 5$ ด้วยระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ เท่ากับ 0.5 โดยที่ $y(0) = 4$ และ $y'(0) = 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 0.5\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

และพล็อตกราฟของผลการคำนวณที่ได้

3. จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธี (ก) ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (ข) ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา อันดับที่สี่ ในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 1$ ด้วยระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ เท่ากับ 0.2 โดยที่ $y(0) = 2$ และ $z(0) = 4$

$$\frac{dy}{dx} = -2y + 4e^{-x}$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{yz^2}{3}$$

4. การเคลื่อนที่ของระบบสปริง–มวล–แดมเปอร์ อธิบายได้ดังสมการต่อไปนี้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

จงคำนวณและพล็อต การขจัด x (m) ในช่วงเวลา $0 \le t \le 15$ (s) โดยกำหนดให้ $m = 20$ kg, $c = 5$ (N.s/m) และ $k = 20$ (N/m) การขจัดเริ่มต้น และเวลาเริ่มต้นของมวลมีค่าเท่ากับ 1 m และ 0 m/s ตามลำดับ

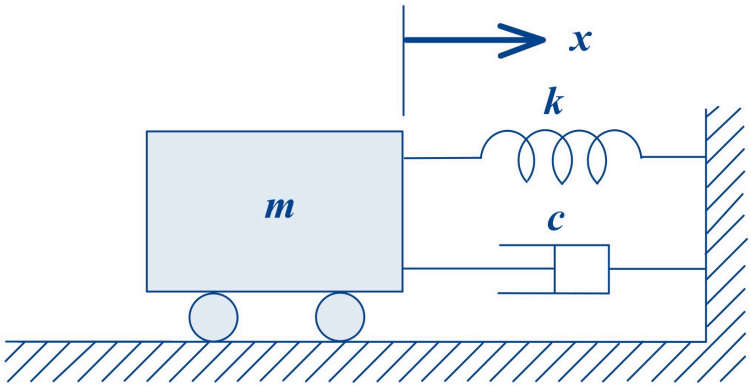
5. ในการระบายน้ำออกจากถังทรงกระบอกผ่านวาล์วที่ก้นถัง อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำในถังสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

ถ้าค่า $k = 0.06$ จงคำนวณหาเวลาที่ใช้ระบายน้ำทั้งหมดออกจากถังนี้ โดยที่ถังนี้มีระดับน้ำเริ่มต้นสูง 3 Meters

6. การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับสปริงและแดมเปอร์สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ได้ดังนี้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$



รูปที่ 7.7: ระบบมวล–สปริง–แดมเปอร์

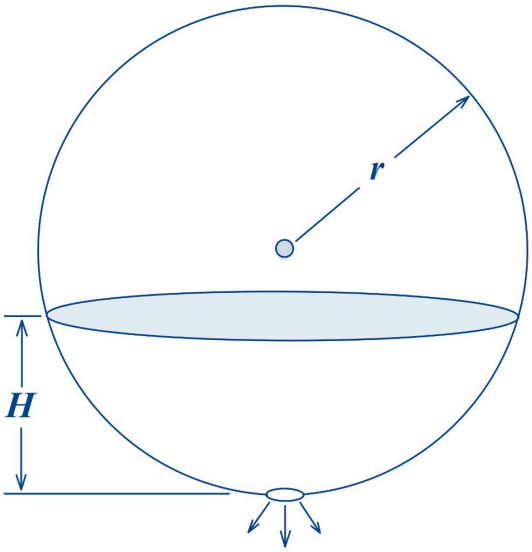
โดยที่ x คือ ระยะยืดจากจุดสมดุล (m), t คือ เวลา (s) และ c คือ สัมประสิทธิ์ความหน่วง (damping coefficient) (N.s/m) ถ้าหากค่าคงที่สปริงมีค่า 20 N/m ความเร็วเริ่มต้นเป็น 0 และระยะทางเริ่มต้น มีค่า x = 1 m จงคำนวณหาระยะยืดของสปริงในช่วงเวลา 0 ถึง 15 วินาที และพล็อตกราฟระยะยืดต่อเวลาของทั้งสามค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง ได้แก่ 5 (underdamped), 40 (critically damped) และ 200 (overdamped)

7. ภาชนะทรงกลมมีรูเปิดที่ก้นถังเพื่อให้ของไหลระบายออก ดังรูปที่ 7.8 อัตราการไหลเชิงปริมาตรที่ผ่านรูเปิดเขียนโดยใช้กฎของ Torricelli ได้ดังนี้

$$Q = CA\sqrt{gh}$$

โดยที่ Q คือ อัตราการไหลเชิงปริมาตรขาออก (m^3/s), C คือ สัมประสิทธิ์การไหล มีค่าเป็น 0.6, A คือ พื้นที่ของรูเปิด (m^2) และ h คือ ความลึกของของไหล (m) ใช้วิธี numerical method ในการหาว่าจะต้องใช้เวลาเท่าไหร่ในการระบายน้ำออกจากภาชนะทรงกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 3 m และมีระดับน้ำเริ่มต้นที่ 2.75 m รูเปิดมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.1 m โดยมีปริมาตรของของเหลวในภาชนะที่หาได้จากสมการ ดังนี้

$$V = \pi H^2\frac{(3r - H)}{3}, \qquad \frac{dV}{dt} = -Q$$



รูปที่ 7.8: ถังน้ำทรงกลมที่มีรูระบายน้ำด้านล่าง

8. ในการสืบสวนคดีฆาตรกรรมหรือคดีการอัตนิวิบาตรกรรม การคาดการณ์เวลาเสียชีวิตมีความสำคัญอย่างยิ่ง จากการวิจัยโดยการสังเกตพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของพื้นผิวของวัตถุเป็นสัดส่วนต่อความต่างระหว่างอุณหภูมิของวัตถุและสภาวะแวดล้อมหรืออุณหภูมิโดยรอบ หรือที่เรียกว่า กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's Law of Cooling) ดังนั้น หาก $T(t)$ คือ อุณหภูมิของพื้นผิววัตถุ ณ เวลา t แล้ว T_a คือ ค่าคงที่ของอุณหภูมิสภาวะแวดล้อม ดังนั้น

$$\frac{dT}{dx} = -K(T - T_a)$$

โดยที่ $K > 0$ คือ ค่าคงที่สัมพันธ์ สมมุติให้ $t = 0$ ณ เวลาที่พบศพมีอุณหภูมิ T_0 และ ณ เวลาเสียชีวิตร่างกายมีอุณหภูมิ T_d ตามมาตรฐานปกติมีค่าเท่ากับ 37 °C (98.6 °F) หากอุณหภูมิขณะพบศพมีค่า 29.5 °C และเมื่อผ่านไปสองชั่วโมงมีค่าเท่ากับ 23.5 °C อุณหภูมิโดยรอบเป็น 20 °C

- จงหา K และเวลาในการเสียชีวิต
- จงคำนวณหาคำตอบของสมการอนุพันธ์สามัญด้วยวิธี numerical และจงพล็อตกราฟอุณหภูมิร่างกายต่อเวลา

9. ข้อที่ 20 หน้าที่ 951 สมการต่อไปนี้ถูกใช้ในการหาการโก่งตัวของเสากระโดงเรือใบเมื่อมีแรงลมปะทะ คือ

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{f(z)}{2EI}(L - z)^2$$

โดยที่ $f(z)$ คือ แรงลม , E คือ modulus of elastic, L คือ ความยาวกระโดงเรือ และ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อย แรงที่กระทำต่อเสากระโดงเรือขึ้นอยู่กับความสูง z ดังแสดงในสมการ

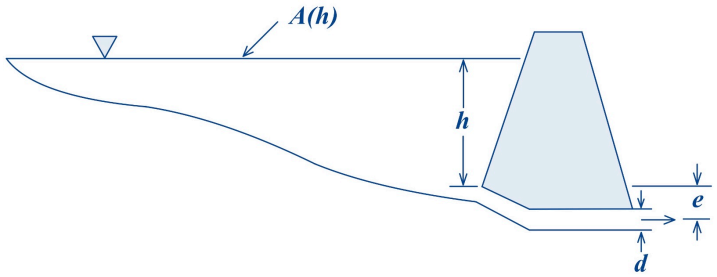
$$f(z) = \frac{200z}{5+z}e^{-2z/30}$$

จงหาการโก่งของเสาที่ความสูงต่าง ๆ ถ้า $y = 0$, $dy/dx = 0$ ณ $z = 0$, $L = 30$, $E = 1.25 * 10^8$ และ $I = 0.05$ แสดงผลการคำนวณเป็นกราฟของค่าการโก่งที่ความสูงต่าง ๆ

10. สระน้ำระบายน้ำผ่านท่อดังภาพที่ 7.9 จากสมมุตฐานโดยทั่วไปแล้ว สมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความลึกต่อเวลาคือ

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4A(h)}\sqrt{2g(h+e)}$$

โดยที่ h คือ ความดึก (m), t คือ เวลา (s), d คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ (m), $A(h)$ คือ พื้นที่ผิวของอ่างน้ำที่ขึ้นกับเวลา (m^2) และ e คือ ความลึกของท่อที่ระบายน้ำออกใต้ก้นบ่อ (m) จงใช้ข้อมูลข้างล่างนี้ คำนวณสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาเวลาที่ใช้ในการระบายน้ำออกจากสระน้ำจนหมด กำหนดให้ $h(0) = 6$ m, $d = 0.25$ m, $e = 1$ m และจงพล็อตกราฟระดับน้ำต่อเวลา



รูปที่ 7.9: สระน้ำที่มีการระบายน้ำออกผ่านท่อ

8. สมการเชิงอนุพันธ์ : ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต

8.1	**ระเบียบวิธีการยิง (Shooting method)**	218
8.2	**ระเบียบวิธีผลต่างแบบจำกัด**	226
	แบบฝึกหัดท้ายบท	236

งานวิเคราะห์ด้านวิศวกรรมบางประเภทจะต้องแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีการกำหนดเงื่อนไขมากกว่าหนึ่งตำแหน่ง สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีการระบุค่าที่ตำแหน่งตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตำแหน่ง เรียกว่า ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต (Boundary–value problem, BVP) ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเงื่อนไขขอบเขต มีดังนี้

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right); a \le x \le b \tag{8.1}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือ

$$y(x=a) = \alpha; y(x=b) = \beta$$

บางครั้งเงื่อนไขขอบเขตอาจจะอยู่ในรูป

$$c_1 y(x=a) + c_2 \frac{dy}{dx}(x=a) = c_3 \tag{8.2}$$

$$c_4 y(x=a) + c_5 \frac{dy}{dx}(x=a) = c_6 \tag{8.3}$$

โดยที่ c_1 ถึง c_6 เป็นค่าคงที่ จะเห็นว่า เงื่อนไขขอบเขตของสมการ (8.1) จะเป็นการกำหนดค่า y ไว้ที่ตำแหน่ง x สองตำแหน่ง ดังนั้นผลเฉลยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ $x = a$ และ $x = b$ เนื่องจากไม่รู้ค่า (dy/dx) ที่ตำแหน่ง $x = a$ จึงไม่สามารถเริ่มต้นคำนวณจากจุด $x = a$ ไปตามช่วงการคำนวณ h ได้ จึงต้องใช้วิธีต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

8.1 ระเบียบวิธีการยิง (Shooting method)

วิธีนี้สามารถใช้ได้กับปัญหาเงื่อนไขขอบเขต ทั้งแบบสมการเชิงเส้นและสมการไม่เป็นเชิงเส้น หลักการของวิธีนี้ คือ เปลี่ยนปัญหาแบบปัญหาเงื่อนไขขอบเขตให้เป็นปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น แล้วใช้วิธีของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวในบทที่ผ่านมาคำนวณหาผลเฉลยโดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. เดาค่าเริ่มต้นของสมการอนุพันธ์ เพื่อที่จะสามารถแก้ไขปัญหาแบบเงื่อนไขเริ่มต้น (IVP) ได้
2. กำหนดสมการความสัมพันธ์ระหว่าง y และค่าเริ่มต้นที่เดาขึ้นมา
3. คำนวณค่าปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์และสมการความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นมาในช่วงของ x ในรูปของสมการปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น
4. ผลที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 นำมาใช้ในการปรับแก้ค่าเดาเริ่มต้นใหม่ต่อไป
5. ใช้ค่าเดาเริ่มต้นใหม่ ในขั้นตอนที่ 4 ทำซ้ำขั้นตอนที่ 2 ถึง 4 จนกระทั่งผลเฉลยตรงกับค่าเงื่อนไขขอบเขตที่สอง

วิธีนี้คล้ายกับระเบียบวิธีของนิวตัน–ราฟสัน ที่ใช้ในการหารากของสมการ บางครั้งจะเรียกวิธีนี้ว่าระเบียบวิธีของนิวตัน–ราฟสัน พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองต่อไปนี้

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right); a \le x \le b \tag{8.4}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$y(x = a) = y_a$$

และ

$$\frac{dy}{dx}(x = b) = y_b'$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายของ x และถ้านิยามให้

$$y_1(x) = y(x)$$

และ

$$y_2(x) = \frac{dy_1(x)}{dx} = \frac{dy(x)}{dx}$$

สมการ (8.4) สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับแรกสองสมการได้ ดังนี้

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \equiv y_2(x) \tag{8.5}$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \equiv f(x, y_1, y_2) \tag{8.6}$$

$$y_1(a) = y_{1,s} \equiv y_a \tag{8.7}$$

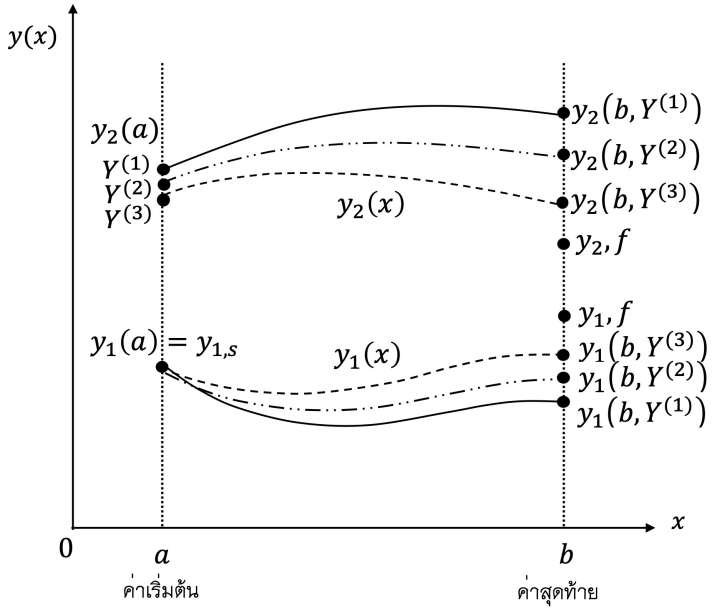
และ

$$y_2(b) = y_{2,f} \equiv y_b' \tag{8.8}$$

ในการคำนวณหาค่าปริพันธ์ของสมการ (8.5) และ (8.6) จะต้องรู้ค่า $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ ที่ตำแหน่งเริ่มต้น a แต่เนื่องจากมีเพียง $y_1(a) = y_{1,s}$ จาก สมการ (8.7) เท่านั้นที่รู้ค่า ดังนั้น จึงต้องทำการเดาค่าเริ่มต้นของ $y_2(a)$ โดยกำหนดให้

$$y_2(x = a) = Y \tag{8.9}$$

จากนั้น ใช้วิธีใดก็ได้ในบทที่ 7 คำนวณหาค่าปริพันธ์ของสมการ (8.5) และสมการ (8.6) จาก a ถึง b เพื่อหาผลเฉลยของ $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เนื่องจากค่าเริ่มต้น $y_2(a)$ เป็นค่าเดา เพราะฉะนั้นค่าสุดท้ายที่คำนวณได้ $y_2(b, Y)$ จะไม่ตรงกับเงื่อนไขในสมการ (8.8) ดังแสดงในรูป 8.1 ดังนั้น จึงจะต้องมีการแก้ไขค่าเดา Y ใหม่ให้เหมาะสมในการนำมาใช้เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น $y_2(x)$ ต่อไป โดยพิจารณาให้



รูปที่ 8.1: ภาพอธิบายหลักการคำนวณของระเบียบวิธีการยิง

$$h(Y) = y_2(b, Y) - y_{2,f} \tag{8.10}$$

พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) ของ $h(Y)$ รอบตำแหน่ง Y

$$h(Y+\Delta Y) = h(Y) + \frac{\partial h}{\partial Y}\Delta Y + \ldots \tag{8.11}$$

และถ้าให้ค่า $Y+\Delta Y$ เป็นค่าเริ่มต้นที่ทำให้ค่า $y_2(x)$ ตรงกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ก็จะได้ว่า

$$\Delta Y = -\frac{h(Y)}{\left(\frac{\partial h}{\partial Y}\right)} \tag{8.12}$$

จากสมการ (8.10)

$$\frac{\partial h(Y)}{\partial Y} = \frac{\partial y_2(b,Y)}{\partial Y} \tag{8.13}$$

สมการ (8.12) สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\Delta Y = -\frac{(y_2(b,Y) - y_{2,f})}{\left\{\frac{\partial y_2(b,Y)}{\partial Y}\right\}} \tag{8.14}$$

ค่าเดาใหม่ของ $y_2(x)$ ก็คือ

$$y_2(a) = Y + \Delta Y \tag{8.15}$$

โดยที่ Y คือค่าเดาเริ่มต้น และ ΔY ได้จากสมการ (8.14) ส่วนเทอม $\frac{\partial y_2(b,Y)}{\partial y}$ หาได้ด้วยการหาอนุพันธ์ของสมการ (8.5) และ (8.6) ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{dy_1}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial Y}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{y_1}{\partial Y} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{y_2}{\partial Y} \tag{8.16}$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{dy_2}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_2}{\partial Y}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{y_1}{\partial Y} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{y_2}{\partial Y} \tag{8.17}$$

กำหนดให้

$$g_1 = \frac{\partial y_1}{\partial Y}, g_2 = \frac{\partial y_2}{\partial Y} \tag{8.18}$$

สมการ (8.16) และ (8.17) สามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{dg_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}g_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}g_2 \tag{8.19}$$

และ

$$\frac{dg_2}{dx} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}g_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}g_2 \tag{8.20}$$

ค่าเริ่มต้นสำหรับ g_1 และ g_2 สามารถหาได้จากสมการ (8.7), (8.9) และ (8.18)

$$g_1(a) = \left.\frac{\partial y_1}{\partial Y}\right|_a = 0 \tag{8.21}$$

และ

$$g_2(a) = \left.\frac{\partial y_2}{\partial Y}\right|_a = 1 \tag{8.22}$$

สมการที่ (8.5), (8.6), (8.19) และ (8.20) จะถูกคำนวณแบบระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งสี่สมการ ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นจากสมการ (8.7), (8.8), (8.21) และ (8.22) จากนั้น ค่าปรับแก้ ΔY สามารถคำนวณได้จาก $y_2(a, Y)$ และ $(\partial y_2/\partial Y)\Big|_a$ จากสมการ (8.15) ทำการคำนวณวนซ้ำทั้งหมด โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตใหม่ ($Y_{\text{new}} = Y_{\text{old}} + \Delta Y$) จนกระทั่ง

$$|h(Y)| = |y_2(b, Y) - y_{2,f}| < \epsilon \tag{8.23}$$

ตัวอย่าง 8.1. *จงคำนวณหาอุณหภูมิตามแนวรัศมีของท่อทรงกระบอกที่มีรัศมีภายใน 5 inch และรัศมีภายนอก 10 inch โดยที่ผิวท่อด้านในมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ* 120° *และผิวด้านนอกท่อมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ* 60°

วิธีทำ *สมการการกระจายตัวของอุณหภูมิในแนวรัศมีแบบ 1 มิติ คือ*

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \tag{E1}$$

ด้วยเงื่อนไขขอบเขตเท่ากับ

$$T(r = 5) = 120, T(r = 10) = 60 \tag{E2}$$

เขียนสมการ (E1) *ให้อยู่ในรูปของสมการอันดับหนึ่งจำนวนสองสมการ ได้ดังนี้*

$$\frac{dT_1}{dr} \equiv \frac{dT}{dr} = T_2 \tag{E3}$$

และ

$$\frac{dT_2}{dr} = \frac{1}{2}T_2 \tag{E4}$$

สมมติให้ ค่า $Y^{(1)} = \frac{dT}{dr}(r = 5) = -11.0$ *แล้วใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ คำนวณผลเฉลยของ* $T(r =$

$10) = 81.8769°C$ *และ* $\frac{dT}{dr}(r = 10) = -5.5°C/in$ *จะได้ค่า* $h(Y)$ *ดังนี้*

$$h(Y^{(1)}) = y_2(b, Y^{(1)}) - y_{2,f} = 81.8769 - 60 = 21.8769 \tag{E5}$$

ต่อมาสมมติให้ ค่า $Y^{(2)} = \frac{dT}{dr}(r = 5) = 13.0$ *แล้วใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่คำนวณผลเฉลยของ* $T(r = 10) = 74.9455°C$ *และ* $\frac{dT}{dr}(r = 10) = -6.5°C/in$ *จะได้ค่า* $h(Y)$ *ดังนี้*

$$h(Y^{(2)}) = y_2(b, Y^{(2)}) - y_{2,f} = 74.9455 - 60 = 14.9455 \tag{E6}$$

ใช้วิธีผลต่างแบบจำกัดคำนวณหาค่าของ $\frac{\partial h}{\partial Y}$ *ที่* $Y^{(1)}$ *จากสมการ* (E5) *และ* (E6) *จะได้*

$$\left.\frac{\partial h}{\partial Y}\right|_{Y^{(1)}} = \frac{h(Y^{(2)}) - h(Y^{(1)})}{Y^{(2)} - Y^{(1)}} = \frac{74.9455 - 81.8769}{-13.0 + 11.0} = 3.4657 \tag{E7}$$

คำนวณค่า ΔY *โดยการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ของ* $h(Y)$ *จะได้*

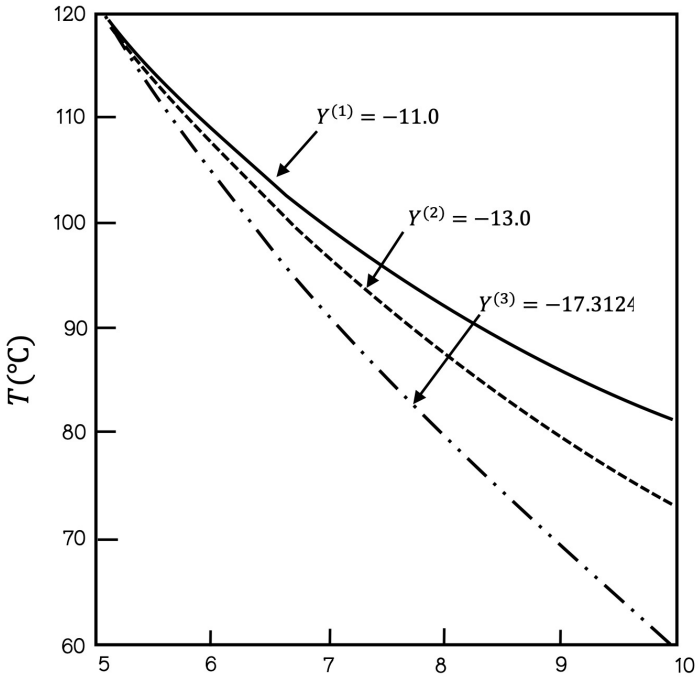
$$h(Y) = h(Y^{(1)}) + \frac{\partial h}{\partial Y}(Y^{(1)})\Delta Y = 0 \tag{E8}$$

$$\Delta Y = -\frac{h(Y^{(1)})}{\frac{\partial h}{\partial Y}(Y^{(1)})} \tag{E9}$$

จะได้ค่าประมาณ $Y^{(3)} = Y_{(1)} + \Delta y = -11.0 - 6.3124 = -17.3124$ *ผลเฉลยจากระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ก็คือ*

$$T(r = 10) = 60.0°C, \frac{dT}{dr}(r = 10) = -8.6562°C/in \tag{E10}$$

เนื่องจากผลเฉลยได้ค่า $T(r = 10) = 60°C$ *ตรงกับที่กำหนด ดังนั้นผลเฉลยในรอบนี้จึงเป็นผลเฉลยสุดท้าย รูปที่ 8.2 แสดงให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ได้จากค่า* $Y^{(i)}$ *ต่าง ๆ*



รูปที่ 8.2: การกระจายตัวของอุณหภูมิจากค่า $Y^{(i)}$ ต่าง ๆ

8.1.1 วิธีการคำนวณทั่วไปสำหรับระบบสมการ จำนวน n สมการ

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{8.24}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตสำหรับตัวแปรจำนวน k ตัวแปรแรก ณ ตำแหน่งสุดท้าย b และจำนวน $(n-k)$ ตัวแปร ณ ตำแหน่งเริ่มต้น a

$$y_i(b) = y_{i,f}; i = 1, 2, \ldots, k \tag{8.25}$$

และ

$$y_i(a) = y_{i,s}; i = k+1, k+2, \ldots, n \tag{8.26}$$

ในการแก้สมการ (8.24) ด้วยวิธีของเงื่อนไขเริ่มต้น เริ่มด้วยการเดาเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับ $y_i(x), i = 1, 2\ldots, k$

$$y_i(a) = Y_i; i = 1, 2, \ldots, k \tag{8.27}$$

ผลเฉลยที่ได้จากค่าเดาเริ่มต้นจากสมการ (8.27) จะได้

$$h_i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = y_i(b, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - y_{i,f}; i = 1, 2, \ldots, k \tag{8.28}$$

ถ้าสมมติให้ $(Y_i + \Delta Y_i), i = 1, 2, \ldots, k$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดให้

$$h_i(Y_1 + \Delta Y_1, \ldots, Y_k + \Delta Y_k) = h_i(Y_1, \ldots, Y_k) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial h_i}{\partial Y_j} \Delta Y_j = 0; i = 1, 2, \ldots, k \tag{8.29}$$

สมการ (8.29) สามารถจัดได้เป็น

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial h_1}{\partial Y_1}\right)\Delta Y_1 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial Y_2}\right)\Delta Y_2 + \cdots + \left(\frac{\partial h_1}{\partial Y_k}\right)\Delta Y_k &= -h_1(Y_1, \ldots, Y_k) \\
&\vdots \\
\left(\frac{\partial h_k}{\partial Y_1}\right)\Delta Y_1 + \left(\frac{\partial h_k}{\partial Y_2}\right)\Delta Y_2 + \cdots + \left(\frac{\partial h_k}{\partial Y_k}\right)\Delta Y_k &= -h_k(Y_1, \ldots, Y_k)
\end{aligned} \tag{8.30}$$

โดยที่อนุพันธ์ในสมการ (8.30) จะคำนวณที่ตำแหน่ง $x = b$ ผลเฉลยของสมการ (8.30) จะให้ค่าแก้ไขของค่าเดาสำหรับการคำนวณในรอบต่อไป ดังนี้

$$\Delta Y = -\left[J(\vec{Y}, b)\right]^{-1} \vec{h}(\vec{Y}) \tag{8.31}$$

โดยที่

$$\Delta\vec{Y} = \begin{Bmatrix} \Delta Y_1 \\ \vdots \\ \Delta Y_k \end{Bmatrix} \tag{8.32}$$

$$\vec{h}(\vec{Y}) = \begin{Bmatrix} h_1(Y_1, \ldots, Y_k) \\ \vdots \\ h_k(Y_1, \ldots, Y_k) \end{Bmatrix} \tag{8.33}$$

และ

$$\left[J(\vec{Y},b)\right]=\left[\begin{array}{c}\frac{\partial y_1}{\partial Y_1},\cdots,\frac{\partial y_1}{\partial Y_k}\\ \vdots \\ \frac{\partial y_k}{\partial Y_1},\cdots,\frac{\partial y_k}{\partial Y_k}\end{array}\right]_{x=b} \tag{8.34}$$

เทอมของ $(\partial y_i/\partial Y_k)$ในสมการ (8.34) สามารถหาค่าได้จากการหาค่าอนุพันธ์ของสมการ (8.24)

$$\frac{\partial}{\partial Y_j}\left(\frac{dy_i}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_i}{\partial Y_j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial Y_j};i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,k \tag{8.35}$$

ถ้ากำหนดให้

$$g_{ij}=\frac{\partial y_i}{\partial Y_j};i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,k \tag{8.36}$$

สมการ (8.35) สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\frac{dp_{ij}}{dx}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_k}p_{ij};i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,k \tag{8.37}$$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น

$$g_{ij}(a)=\begin{cases}1 \text{ if } i=j\\ \qquad\qquad ;i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,k\\ 1 \text{ if } i\neq j\end{cases} \tag{8.38}$$

สมการ (8.24) และ (8.37) ถูกคำนวณจาก a ถึง b โดยใช้ค่าเริ่มต้นจากสมการ (8.26), (8.27) และ (8.38) จากนั้น ค่า $\Delta\vec{Y}$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (8.31) และ

$$\vec{Y}_{\text{new}}=\vec{Y}_{\text{old}}+\Delta\vec{Y}=\vec{Y}_{\text{old}}-\left[J(\vec{Y},b)\right]^{-1}\vec{h}\vec{Y} \tag{8.39}$$

ทำการคำนวณวนซ้ำจนกระทั่ง

$$|h_i(Y_1,\ldots,Y_k)|=\left|y_i(b,Y_1,Y_2,\ldots,Y_k)-y_{i,f}\right|\leq\epsilon;i=1,2,\ldots,k \tag{8.40}$$

โดยที่ ϵ เป็นค่าคงที่ที่น้อยมาก ๆ

วิธีนี้สามารถนำไปใช้กับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งแบบสมการเชิงเส้นและสมการไม่เป็นเชิงเส้น แต่สำหรับ

ระบบสมการเชิงเส้นจะมีอีกหนึ่งวิธีที่ง่ายและไม่ซับซ้อน ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือเกี่ยวกับการระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) อื่น ๆ เพิ่มเติมได้

8.2 ระเบียบวิธีผลต่างแบบจำกัด

วิธีนี้จะใช้การประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยผลต่างแบบจำกัด ที่จุดคำนวณต่าง ๆ (Mesh points) ภายในช่วงของการหาค่าปริพันธ์ วิธีนี้จะเปลี่ยนให้สมการเชิงอนุพันธ์ไปอยู่ในรูปของระบบสมการพีชคณิต ระบบสมการพีชคณิตที่ได้จะเป็นเชิงเส้นหรือไม่เป็นเชิงเส้นจะขึ้นอยู่กับรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการคำนวณหาคำตอบ

8.2.1 ผลเฉลยของระบบสมการอันดับสอง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x); a \le x \le b \tag{8.41}$$

ด้วยเงื่อนไขขอบเขต

$$y(a) = \alpha \tag{8.42}$$

และ

$$y(b) = \beta \tag{8.43}$$

แบ่งช่วงการอินทิเกรต $[a, b]$ ออกเป็น N ช่วง โดยมีระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ

เท่ากับ $h = ((b-a)/N)$ โดยที่ $x_0 = a$ และ $x_N = b$ และ

$$x_i = a + ih; \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{8.44}$$

เป็นจุดคำนวณภายใน (Interior mesh points) นำเอาผลต่างศูนย์กลางมาใช้กับเทอม y' และ y''

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \tag{8.45}$$

และ

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \tag{8.46}$$

โดยที่ $y_i = y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ ดังนั้น สมการ (8.41) ในรูปของการประมาณค่าด้วยผลต่างแบบจำกัดของตำแหน่ง

ที่ i คือ

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p(x_i)\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q(x_i)y(i)=r(x_i);i=1,2,\ldots,N-1 \tag{8.47}$$

ถ้ากำหนดให้

$$p(x_i)=p_i, q(x_i)=q_i, r(x_i)=r_i \tag{8.48}$$

นำเอา h^2 มาคูณสมการ (8.47) จะได้

$$\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)y_{i+1}+\left(-2+h^2q_i\right)y_i+\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)y_{i-1}=h^2r_i;i=1,2,\ldots,N-1 \tag{8.49}$$

เนื่องจาก y_0 และ y_N เป็นค่าเงื่อนไขขอบเขตสมการ (8.49) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\left(-2+h^2q_1\right)y_1+\left(1+\frac{h}{2}p_1\right)y_2&=h^2r_1-\left(1-\frac{h}{2}p_1\right)\alpha\\
\left(1-\frac{h}{2}p_2\right)y_1+\left(-2+h^2q_2\right)y_2+\left(1+\frac{h}{2}p_2\right)y_3&=h^2r_2\\
\left(1-\frac{h}{2}p_3\right)y_2+\left(-2+h^2q_3\right)y_3+\left(1+\frac{h}{2}p_3\right)y_4&=h^2r_3\\
&\vdots\\
\left(1-\frac{h}{2}p_{N-1}\right)y_{N-2}+\left(-2+h^2q_{N-1}\right)y_{N-1}&=h^2r_{N-1}-\left(1+\frac{h}{2}p_{N-1}\right)\beta
\end{aligned} \tag{8.50}$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (8.50) อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น $(N-1)$ สมการของตัวแปร $y_1, y_2, \ldots, y_{N_1}$ และ $p(x), q(x)$ และ $r(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x สมการ (8.50) สามารถแสดงในรูปของเมทริกซ์ ได้ว่า

$$[A]\vec{y}=\vec{b} \tag{8.51}$$

โดยที่

$$\vec{y}=\begin{Bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{N-2}\\ y_{N-1}\end{Bmatrix} \tag{8.52}$$

$$\vec{b} = \begin{Bmatrix} h^2 r_1 - \left(1 - \frac{h}{2} p_1\right)\alpha \\ h^2 r_2 \\ \vdots \\ h^2 r_{N-2} \\ h^2 r_{N-1} - \left(1 + \frac{h}{2} p_{N-1}\right)\beta \end{Bmatrix} \tag{8.53}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} Q_1 & P_1 & & & & & \\ R_2 & Q_2 & P_2 & & & 0 & \\ & R_3 & Q_3 & P_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & R_{N-2} & Q_{N-2} & P_{N-2} \\ & & & & & & R_{N-1} & Q_{N-1} \end{bmatrix} \tag{8.54}$$

และ

$$P_i = 1 + \frac{h}{2} p_i; i = 1, 2, \ldots, N-2 \tag{8.55}$$

$$Q_i = -2 + h^2 q_i; i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{8.56}$$

$$R_i = 1 - \frac{h}{2} p_i; i = 2, 2, \ldots, N-1 \tag{8.57}$$

สมการ (8.51) สามารถคำนวณได้ด้วยระเบียบวิธีระบบสมการเชิงเส้น ดังที่กล่าวไปแล้วในบทที่ผ่านมา

ตัวอย่าง 8.2. *จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้*

$$y'' - y' + y = 3e^{2x} - 2\sin x$$
$$y(1) = 6.308447, y(2) = 55.430436 \tag{E1}$$

วิธีทำ

แบ่งช่วงการคำนวณ $1 \le x \le 2$ *ออกเป็น* **99** *ช่วง* $(N = 99)$ *จะได้* **step size** $h = 1/99$, $x_1 = 1.0$ *และ* $x_i = x_1 + (i-1)h, i = 2, 3, \ldots, 100$ *และ* $x_{100} = 2.0$ *และสมการ* (8.49) *สามารถแสดงได้ดังนี้*

$$\left(1 + \frac{h}{2}p_i\right)y_{i+1} + \left(-2 + h^2 q_i\right)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}p_i\right)y_{i-1} = h^2 r_i; i = 2, \ldots, N \tag{E2}$$

โดยที่ $p_i = -1$, $q_i = 1$ *และ* $r_i = 3e^{2x_i} - 2\sin x_i$ *สมการ* (E2) *เป็นระบบสมการ* **tridiagonal** *และผลการคำนวณที่เป็นคำตอบคือ*

x	$y(x)$	*Exact* $y(x)$	*Error*
1.0000	*0.63084469E+01*	*0.63084517E+01*	*0.47683716E-05*
1.0200	*0.66439004E+01*	*0.66438770E+01*	*-0.23365021E-04*
1.0300	*0.68163695E+01*	*0.68163314E+01*	*-0.38146973E-04*
1.0400	*0.69920797E+01*	*0.69920273E+01*	*-0.52452087E-04*
1.0500	*0.71710930E+01*	*0.71710272E+01*	*-0.65803528E-04*
⋮			
1.9600	*0.51159489E+02*	*0.51159351E+02*	*-0.13732910E-03*
1.9700	*0.52196075E+02*	*0.52195976E+02*	*-0.99182129E-04*
1.9800	*0.53253151E+02*	*0.53253086E+02*	*-0.64849854E-04*
1.9900	*0.54331131E+02*	*0.54331104E+02*	*-0.26702881E-04*
2.0000	*0.55430435E+02*	*0.55430443E+02*	*0.76293945E-05*

8.2.2 เงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ใช่ค่าคงที่

ในบางกรณีเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้จะอยู่ในรูปฟังก์ชันของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตาม เช่น

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = c_3 \tag{8.58}$$

ถ้าใช้วิธีผลต่างไปข้างหน้ากับสมการ (8.58) จะได้ว่า

$$c_1 y(a) + c_2 \frac{y(a+h) - y(a)}{h} = c_3 \tag{8.59}$$

และหากสมการ (8.58) เป็นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x = a$ ก็จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$y_0 = \left(\frac{c_3 h - c_2 y_1}{c_1 h - c_2} \right) \tag{8.60}$$

ดังนั้น ณ ตำแหน่ง $i = 1$ สมการ (8.49) จะอยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h}{2} p_1\right) y_2 + \left\{ -2 + h^2 q_1 - \frac{c_2}{(c_1 h - c_2)} + \frac{h c_2 p_1}{2(c_1 h - c_2)} \right\} y_1 \\ + \left\{ h^2 r_1 - \frac{c_3 h}{(c_1 h - c_2)} + \frac{h^2 c_3 p_1}{2(c_1 h - c_2)} \right\} \end{aligned} \tag{8.61}$$

แทนค่าสมการ (8.61) แทนลงในสมการแรกของสมการ (8.50) ก็จะสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว ในกรณีที่เงื่อนขอบเขตเช่นเดียวกันถูกกำหนด ณ ตำแหน่ง $x = b$ ก็สามารถใช้วิธีผลต่างไปข้างหลังจะได้ว่า

$$c_1 y(b) + c_2 y'(b) = c_3 \tag{8.62}$$

$$c_1 y(b) + c_2 \frac{y(b) - y(b-h)}{h} = c_3 \tag{8.63}$$

หรือ

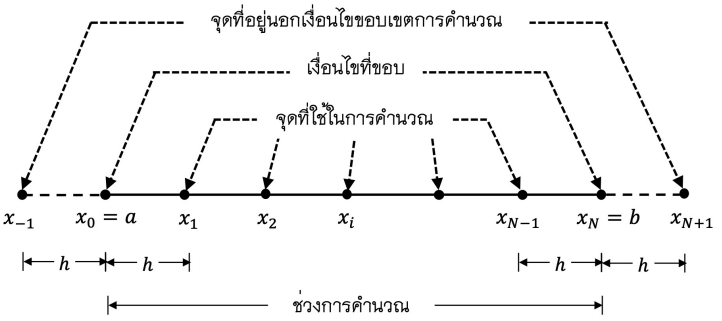
$$y_N = \left(\frac{c_3 h + c_2 y_{N-1}}{c_1 h + c_2} \right) \tag{8.64}$$

แทนค่าสมการ (8.64) ลงในสมการ (8.49) ณ ตำแหน่ง $N - 1$ จะได้

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{h}{2} p_{N-1}\right) y_{N-2} + \left\{ -2 + h^2 q_{N-1} + \frac{c_2}{(c_1 h + c_2)} + \frac{h c_2 p_{N-1}}{2(c_1 h + c_2)} \right\} y_{N-1} \\ = \left\{ h^2 r_{N-1} - \frac{c_3 h}{(c_1 h + c_2)} + \frac{h^2 c_3 p_{N-1}}{2(c_1 h + c_2)} \right\} \end{aligned} \tag{8.65}$$

แทนค่าสมการ (8.65) ลงในสมการสุดท้ายของสมการ (8.50) ก็จะสามารถคำนวณหาตำตอบได้ด้วยวิธีที่กล่าวมาแล้วข้างต้นเช่นกัน

จะสังเกตได้ว่าการใช้วิธีผลต่างแบบจำกัดในสมการ (8.58) และสมการ (8.62) จะมีความคลาดเคลื่อนเป็น $O(h)$ เพราะฉะนั้นความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยสุดท้ายจะมีความคลาดเคลื่อนเป็น $O(h)$ ด้วย ถ้าต้องการความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยเป็น $O(h^2)$ จะต้องใช้ผลต่างศูนย์กลางกับเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (8.58) และ (8.62) ซึ่งจะต้องมีการสร้างจุดหลอกในการคำนวณดังแสดงในรูป 8.3 โดยที่ $x_{-1} = a - h$ และ $x_{N+1} = b + h$



รูปที่ 8.3: จุดหลอกสำหรับการคำนวณ หรือ Exterior node points

จากการใช้ผลต่างศูนย์กลางกับ $y'(a)$ ในสมการที่ (8.58) จะได้ว่า

$$y_{-1} = \left(\frac{2hc_1}{c_2}\right)y_0 + y_1 - \frac{2hc_3}{c_2} \tag{8.66}$$

ดังนั้น y_0 ในสมการ (8.49) จะไม่ใช่ค่าคงที่ ต้องเพิ่มตำแหน่ง $i = 0$ ในสมการ (8.49) ดังนี้

$$\left(1 + \frac{h}{2}p_0\right)y_1 + \left(-2 + h^2q_0\right)y_0 + \left(1 - \frac{h}{2}p_0\right)y_{-1} = h^2r_0 \tag{8.67}$$

แทนค่า y_{-1} จากสมการ (8.66) ลงในสมการ (8.67) จะได้ว่า

$$\left(-2 + h^2q_0 + \frac{2hc_1}{c_2} - \frac{h^2c_1p_0}{c_2}\right)y_0 + \left(-1 + h^2q_1 - \frac{h}{2}p_0\right)y_1 = h^2r_0 + \frac{2hc_3}{c_2} - \frac{h^2c_3p_0}{c_2} \tag{8.68}$$

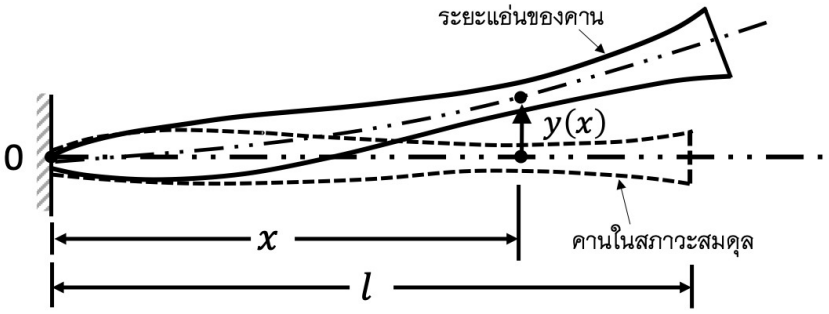
และสมการแรกของสมการ (8.50) ที่ $i = 1$ คือ

$$\left(1 - \frac{h}{2}p_1\right)y_0 + \left(-2 + h^2q_1\right)y_1 + \left(1 + \frac{h}{2}p_1\right)y_2 = h^2r_1 \tag{8.69}$$

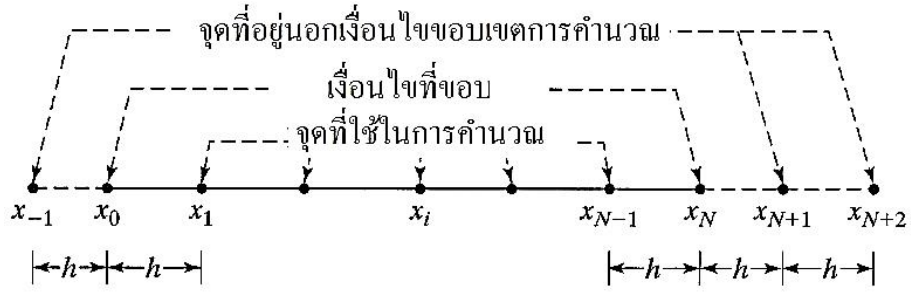
จะเห็นได้ว่ารูปสมการใหม่จะเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรที่ไม่รู้ค่า จำนวน N ตัว คือ $y_o, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$

เทคนิคดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นนี้ ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับสูง หรือปัญหาค่าไอเกน (Eigen values problem) ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 8.4: Nonuniform beam และ Finite difference grid

ตัวอย่าง 8.3. *จงคำนวณหาระยะการเบี่ยงเบนของคาน (Deflection) ดังแสดงในรูป 8.4 จากสมการข้างล่างดังนี้*

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right] = p(x) \tag{8.70}$$

หรือ

$$EI(x)\frac{d^4y(x)}{dx4} + 2\frac{d}{dx}(EI(x))\frac{d^3y(x)}{dx^3} + \frac{d^2}{dx^2}(EI(x))\frac{d^2y(x)}{dx^2} = p(x) \tag{8.71}$$

โดยที่ E คือค่า Young's modulus, I คือค่า โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ (Area moment of inertia) ของคาน และ p คือ แรงที่กระทำต่อคานที่ระยะทาง x โดยที่มีเงื่อนไขขอบเขต ดังต่อไปนี้

$$y(0) = 0 \text{ deflection is zero at } x = 0 \tag{8.72}$$

$$y'(0) = 0 \text{ slope is zero at } x = 0 \tag{8.73}$$

$$y''(l) = 0 \text{ bending moment is zero at } x = l \tag{8.74}$$

$$y'''(l) = 0 \text{ shear force is zero at } x = l \tag{8.75}$$

แบ่งคานออกเป็น N ช่วงเท่า ๆ กัน ด้วย ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ $h = \frac{l}{N}$ จะได้

$$x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \ldots, x_i = ih, \ldots, x_N = Nh = l \tag{8.76}$$

ใช้ผลต่างศูนย์กลางกับอนุพันธ์ของ y

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \tag{8.77}$$

$$y_i''' = \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^3} \tag{8.78}$$

$$y_i'''' = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} \tag{8.79}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต

$$y'(0) = y_0' = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0 \tag{8.80}$$

$$y''(l) = y''_N = \frac{y_{N-1} - 2y_N + y_{N+1}}{h^2} = 0 \tag{8.81}$$

$$y'''(l) = y'''_N = \frac{-y_{N-2} + 2y_{N-1} - 2y_{N+1} + y_{N+2}}{2h^3} = 0 \tag{8.82}$$

และอนุพันธ์ของโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ คือ

$$I'_i = \frac{I_{i+1} - I_{i-1}}{2h}; i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{8.83}$$

$$I''_i = \frac{I_{i-1} - 2I_i + I_{i+1}}{h^2}; i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{8.84}$$

$$I'_N = \frac{3I_N - 4I_{N-1} + I_{N-2}}{2h} \tag{8.85}$$

$$I''_N = \frac{2I_N - 5I_{N-1} + 4I_{N-2} - I_{N-3}}{h^2} \tag{8.86}$$

แทนค่า สมการ (8.77) *ถึง* (8.79), (8.83) *และ* (8.84) *ลงในสมการ* (8.71) *จะได้*

$$\begin{aligned} &\left(EI_i - \frac{1}{2}EI_{i+1} + \frac{1}{2}EI_{i-1}\right)y_{i-2} + (-6EI_i + 2EI_{i+1})y_{i-1} \\ &+ (10EI_i - 2EI_{i-1} - 2EI_{i+1})y_i + (-6EI_i + 2EI_{i-1})y_{i+1} \\ &+ \left(EI_i + \frac{1}{2}EI_{i+1} - \frac{1}{2}EI_{i-1}\right)y_{i+2} = h^4 p_i; i = 1, 2, \ldots, N \end{aligned} \tag{8.87}$$

หรือ

$$a_i y_{i-2} + b_i y_{i-1} + c_i y_i + d_i y_{i+1} + e y_{i+2} = h^4 p_i; i = 1, 2, \ldots, N \tag{8.88}$$

จากสมการ (8.72) *และ* (8.73) *เงื่อนไขขอบเขตที่* $x = 0$ *คือ*

$$y(0) = y_0 = 0 \tag{8.89}$$

$$y'(0) = y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0 \tag{8.90}$$

สำหรับตำแหน่ง $i = 1$ *จะได้ว่า*

$$(a_1 + c_1)y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = h^4 p_1 \tag{8.91}$$

จากสมการ (8.74) *และ* (8.75) *เงื่อนไขขอบเขตที่* $x = l$ *คือ*

$$\begin{aligned} y_{N+1} &= 2y_N - y_{N-1} \\ y'''(l) = y'''_N &= \left(\frac{-y_{N-2} + 2y_{N-1} - 2y_{N+1} + y_{N+2}}{2h^3}\right) = 0 \end{aligned} \tag{8.92}$$

และ

$$y_{N+2} = 4y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2} \tag{8.93}$$

$$a_N y_{N-2} + b_N y_{N-1} + c_N y_N + d_N y_{N+1} + e_N y_{N+2} = h^4 p_N \tag{8.94}$$

แทนค่า สมการ (8.15) *และ* (8.93) *ลงในสมการ* (8.94) *จะได้ว่า*

$$a_{N-1} y_{N-3} + b_{N-1} y_{N-2} + (c_{N-1} - e_{N-1}) y_{N-1} + (d_{N-1} + 2e_{N-1}) y_N = h^4 p_{N-1} \tag{8.95}$$

$$(a_N + e_N) y_{N-2} + (b_N - d_N - 4e_N) y_{N-1} + (c_N + 2d_N + 4e_N) y_N = h^4 p_N \tag{8.96}$$

สุดท้ายจะได้ ระบบสมการเชิงเส้น N สมการ N ตัวแปรที่ไม่รู้ค่า $y_1, y_2, \ldots, y_N$ ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยวิธีคำนวณระบบสมการเชิงเส้นในบทที่ผ่านมา

ความแม่นยำของผลเฉลยจากวิธีผลต่างแบบจำกัดขึ้นอยู่กับชนิดของผลต่างแบบจำกัดที่นำมาประยุกต์ใช้และจำนวนจุดในการคำนวณ การเพิ่มอันดับของผลต่างแบบจำกัดให้สูงขึ้นสามารถเพิ่มความแม่นยำขึ้นได้ แต่ก็จะเพิ่มความยุ่งยากในการตั้งสมการของเงื่อนไขขอบเขต การเพิ่มจำนวนจุดในการคำนวณก็จะทำให้ความแม่นยำสูงขึ้น แต่จำนวนสมการที่ต้องคำนวณก็จะสูงขึ้นด้วยทำให้ใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น แต่การเพิ่มจำนวนกริดการคำนวณมักจะเป็นที่นิยมมากกว่า เนื่องจากมีความยุ่งยากในการเขียนโปรแกรมน้อยกว่า

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ด้วยระเบียบวิธีการยิง

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 1\times10^{-7}(y+273)^4 + 4(150-y) = 0$$

โดยที่ $y(0) = 200$ และ $y(0.5) = 100$

2. จงคำนวณหาอุณหภูมิในแท่งโลหะยาว 10 m จากสมการต่อไปนี้

$$\frac{d^2T}{dx^2} - 0.5T = 0$$

โดยที่ $T(0) = 240$ และ $T(10) = 150$ ด้วยระเบียบวิธีการยิง

3. จงคำนวณหาคำตอบ (x, y, z) ของสมการต่อไปนี้ ในช่วง $0 \le t \le 20$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y\\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz\\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy\end{aligned} \tag{8.97}$$

โดยที่ $\sigma = 10$, $b = 2.66667$, และ $r = 28$ ณ เวลาเริ่มต้น $x = y = z = 5$

4. อุณหภูมิของแท่งโลหะที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -(0.12x^3 - 2.4x^2 + 12x)$$

โดยที่ $T(0) = 40$ และ $T(10) = 200$ ด้วยวิธีผลต่างแบบจำกัด

5. การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ตกลงในแนวดิ่ง แสดงได้ดังสมการ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} - g = 0$$

โดยที่ $c = 12.5$ kg/s, $g = 9.81$ m/s^2 ถ้ามวลของวัตถุมีค่าเท่ากับ 70 kg. จงคำนวณหาตำแหน่ง และความเร็วของวัตถุที่เวลาต่าง ๆ กำหนดให้ $x(0) = 0$ และ $x(12) = 500$ m ด้วยวิธีผลต่างแบบจำกัด

9. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

9.1	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบอิลิปติก (Elliptic)	238
9.2	สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิก	246
9.3	ระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสัน (Crank–Nicolson method)	254
9.4	สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิกสองมิติ	255
9.5	สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทไฮเปอร์โบลิก	256
	แบบฝึกหัดท้ายบท	264

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ขึ้นกับตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัวจะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) สมการเชิงอนุพันธ์สามารถแยกประเภทได้หลายวิธี วิธีที่นิยมมากที่สุดสามารถแยกได้ตามตัวอย่างต่อไปนี้ พิจารณาสมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=G\left(x,y,\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \tag{9.1}$$

ถ้า A,B และ C เป็นฟังก์ชันของ $x,y,\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}$ สมการ (9.1) จะเขียนได้ว่า

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\phi}{\partial x}+E\frac{\partial\phi}{\partial y}+F\phi=H \tag{9.2}$$

ถ้า H ในสมการ (9.2) มีค่าเท่ากับศูนย์ สมการ (9.2) จะเรียกว่า สมการเอกพันธ์ (Homogeneous equations) ถ้า $H\neq 0$ สมการ (9.2) เรียกว่า สมการไม่เอกพันธ์ (Non-homogeneous) และสมการ (9.2) จะสามารถแบ่งเป็นประเภทได้ ดังนี้

$$\text{Ellipic equation: if } B^2-4AC<0 \tag{9.3}$$

$$\text{Parabolic equation: if } B^2-4AC=0 \tag{9.4}$$

$$\text{Hyperbolic equation: if } B^2-4AC>0 \tag{9.5}$$

การแบ่งประเภทของสมการ (9.2) ข้างต้น สามารถใช้ได้กับสมการที่มีอันดับสูงกว่าสอง หรือมีตัวแปรต้นมากกว่าสองตัวได้ สมการประเภทอิลลิปติก (Elliptic) มักจะเป็นที่เกิดขึ้นจากสภาวะคงที่ (Steady state) สมการพาราโบลิก (Parabolic) จะเป็นสมการที่มีการแพร่ (Diffusion) เข้ามาเกี่ยวข้อง และสมการไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic) จะ

เกี่ยวข้องกับระบบที่มีการสั่นสะเทือน (Vibration) เป็นต้น โดยส่วนมากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้จะถูกคำนวณหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะมีได้ทั้งเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต ในกรณีของปัญหาแบบเงื่อนไขเริ่มต้นตัวแปรต้นของสมการอย่างน้อยหนึ่งตัวจะมีช่วงการคำนวณที่มีปลายปิด ส่วนปัญหาแบบเงื่อนไขขอบเขตจะต้องมีการกำหนดค่าที่ขอบของพื้นที่การคำนวณทั้งหมด และชนิดของเงื่อนไขขอบเขตมีสามประเภท ดังนี้

1. เงื่อนไขแบบดิริชเล็ท (Dirichlet condition) ค่าของตัวแปรตามจะถูกกำหนดบนตำแหน่งขอบเขต

$$\phi(x,y) = u(x,y), \text{ for all } (x,y)\epsilon S_1 \tag{9.6}$$

2. เงื่อนไขแบบนิวแมน (Neuman condition) จะเป็นการกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขตที่กำหนด

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x,y) = v(x,y), \text{ for all } (x,y)\epsilon S_2 \tag{9.7}$$

3. เงื่อนไขแบบร็อบบินส์ หรือ แบบผสม (Robbins หรือ mixed condition) จะเป็นการกำหนดค่าด้วยความสัมพันธ์เชิงเส้นของตัวแปรตาม ณ ตำแหน่งขอบเขต

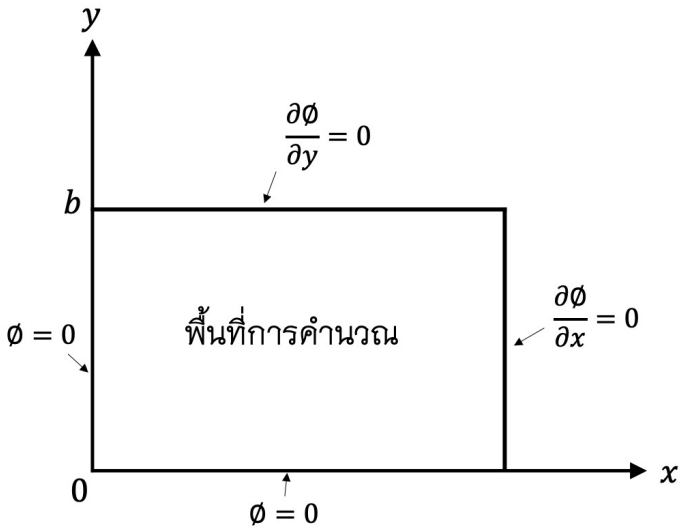
$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x,y) + r\phi(x,y) = w(x,y), \text{ for all } (x,y)\epsilon S_3 \tag{9.8}$$

9.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบอิลิปติก (Elliptic)

พิจารณาสมการอิลิปติกชนิดหนึ่งที่เรียกว่า สมการปัวซอง (Poisson's equation)

$$\nabla^2\phi(x,y) = \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{9.9}$$

ภายใต้พื้นที่การคำนวณแบบสี่เหลี่ยม ดังแสดงในรูป 9.1



รูปที่ 9.1: พื้นที่การคำนวณเชิงตัวเลขแบบสี่เหลี่ยมของสมการเชิงอนุพันธ์

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต ดังนี้

$$\phi(0,y) = 0 \text{ left boundary} \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,y) = 0 \text{ right boundary} \tag{9.11}$$

$$\phi(x,0) = 0 \text{ bottom boundary} \tag{9.12}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,b) = 0 \text{ top boundary} \tag{9.13}$$

แบ่งพื้นที่การคำนวณ (Domain) ออกเป็น m ส่วนเท่าๆ กันตามทิศทาง x และ n ช่วงเท่า ๆ กันตามทิศทาง y จะได้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ $\Delta x = (a/m)$ และ $\Delta y = (b/n)$ จะได้กริดการคำนวณ ดังรูป 9.2 และ

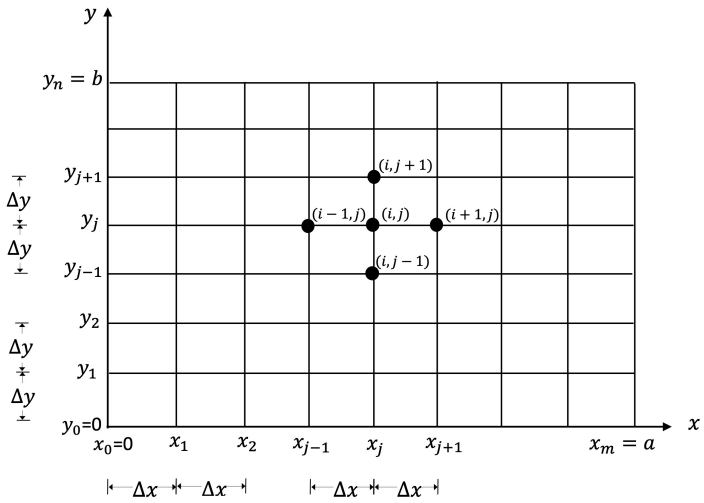
$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x (i = 1, 2, \ldots, m), x_m = m\Delta x = a \tag{9.14}$$

$$y_0 = 0, y_1 = \Delta y, \ldots, y_j = j\Delta y (i = 1, 2, \ldots, n), y_n = n\Delta y = b \tag{9.15}$$

สูตรผลต่างศูนย์กลางของสมการเชิงอนุพันธ์ ณ ตำแหน่ง (i, j) คือ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} \tag{9.16}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} \tag{9.17}$$



รูปที่ 9.2: กริดการคำนวณสองมิติของผลต่างแบบจำกัด

โดยที่ $\phi_{(i,j)} = \phi(x_i, y_j)$ แทนค่าสมการ (9.16) และสมการ (9.17) ลงในสมการ (9.9) จะได้

$$\frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f_{i,j} \tag{9.18}$$

และ $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ เราสามารถแสดงเงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (9.10) ถึง (9.13) ได้ว่า

$$\phi(0, y) = \phi_{0,j}; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{9.19}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(a, y) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{m,j} = 0; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{9.20}$$

$$\phi(x, 0) = \phi_{i,0} = 0; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{9.21}$$

และ

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, b) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{i,n} = 0; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{9.22}$$

เนื่องจาก สมการ (9.19) และ (9.21) เป็นค่าคงที่ ดังนั้น จึงไม่ต้องตั้งสมการผลต่างแบบจำกัดเพื่อคำนวณ ณ ตำแหน่งดังกล่าว ส่วนเงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (9.20) และ (9.22) สามารถทำได้หลายวิธี วิธีแรกคือใช้ผลต่างไปข้างหลัง

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{m,j} = \frac{\phi_{m,j} - \phi_{m-1,j}}{\Delta x} = 0; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{9.23}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{i,n} = \frac{\phi_{i,n} - \phi_{i,n-1}}{\Delta y} = 0; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{9.24}$$

ซึ่งก็คือ

$$\phi_{m,j} = \phi_{m-1,j}; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{9.25}$$

$$\phi_{i,n} = \phi_{i,n-1}; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{9.26}$$

สมการ (9.25) และ (9.26) จะถูกนำไปใช้ในสมการ (9.18) ที่ $i = m$ และ $j = n$ ตามลำดับ

วิธีที่สองคือ ใช้ผลต่างแบบจำกัดที่เหมาะสมกับตำแหน่งขอบเขตมาใช้ เช่น ณ ตำแหน่งด้านขวา ($i = m$) ใช้ผลต่างไปข้างหลังกับเทอม ($\partial^2\phi/\partial x^2$) โดยใช้ผลต่างไปข้างหลัง ของเทอม ($\partial\phi/\partial x$) ด้วยระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณเท่ากับ ($\Delta x/2$)

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{m,j} = \frac{\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{m,j} - \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},j}}{\frac{\Delta x}{2}}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{9.27}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (9.20) และใช้ผลต่างศูนย์กลางกับเทอม $\left.(\partial\phi/\partial x)\right|_{m-\frac{1}{2},j}$ จะได้

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{m,j} = -\frac{2}{\Delta x}\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},j} = -\frac{2}{\Delta x}\left[\frac{\phi_{m,j} - \phi_{m-1,j}}{\Delta x}\right]; \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{9.28}$$

เช่นเดียวกับขอบเขตด้านบน จะใช้วิธีเดียวกันกับเทอม ($\partial^2\phi/\partial y^2$) คือ

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|_{i,n} = \frac{\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{i,n} - \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{i,n-\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta y}{2}}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{9.29}$$

หรือ

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|_{i,n} = -\frac{2}{\Delta y}\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{i,n-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\Delta y}\left[\frac{\phi_{i,n} - \phi_{i,n-1}}{\Delta y}\right]; \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{9.30}$$

แทนค่าสมการ (9.28) และสมการ (9.30) ลงในสมการ (9.18) จะได้

$$-\frac{2}{\Delta x^2}(\phi_{m,j} - \phi_{m-1,j}) + \left(\frac{\phi_{m,j-1} - 2\phi_{m,j} + \phi_{m,j+1}}{\Delta y^2}\right) = f_{m,j}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{9.31}$$

และ

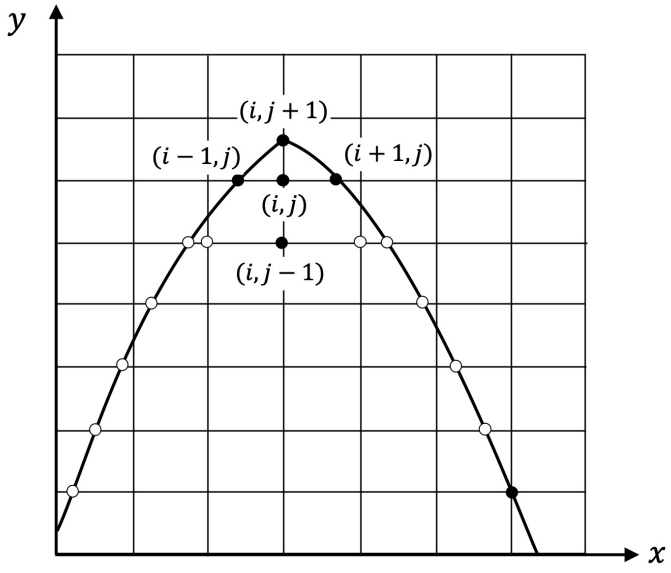
$$\left(\frac{\phi_{i-1,n} - 2\phi_{i,n} + \phi_{i+1,n}}{\Delta x^2}\right) - \frac{2}{\Delta y^2}(\phi_{i,n} - \phi_{i,n-1}) = f_{i,n}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{9.32}$$

สำหรับตำแหน่งมุม (m, n) สมการผลต่างแบบจำกัดจะอยู่ในรูป

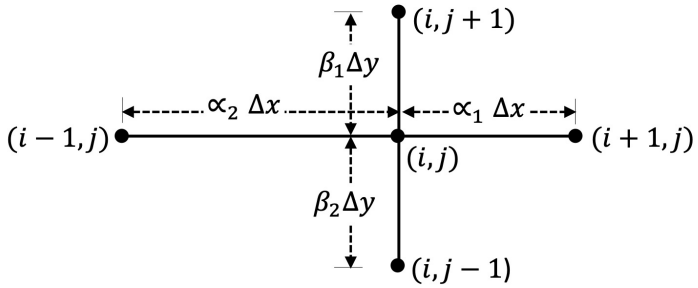
$$-\frac{2}{\Delta x^2}(\phi_{m,n} - \phi_{m-1,n}) - \frac{2}{\Delta y^2}(\phi_{m,n} - \phi_{m,n-1}) = f_{m,n} \tag{9.33}$$

9.1.1 ขอบเขตการคำนวณที่มีรูปร่างไม่ปกติ

ในบางกรณีพื้นที่คำนวณของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอาจจะมีรูปร่างที่ไม่ปกติ ดังแสดงในรูป 9.3 และกริดการคำนวณแบบสี่เหลี่ยมอาจจะไม่ตกทับกับตำแหน่งขอบเขตได้



รูปที่ 9.3: โดเมนการคำนวณที่มีขอบเขตไม่ปกติ



รูปที่ 9.4: การใช้สัดส่วนของระยะทางระหว่างจุดสำหรับการคำนวณสำหรับขอบเขตที่มีรูปร่างไม่ปกติ

ดังนั้น การประมาณค่าผลต่างแบบจำกัดสำหรับขอบเขตแบบนี้ จึงมีวิธีดังนี้

พิจารณากริด ดังรูปที่ 9.4 ระหว่างจุดคำนวณทางซ้ายและขวาของจุด (i, j) มีระยะทางเป็น $\alpha_1 \Delta x$ และ $\alpha_2 \Delta x$ ตามลำดับ โดยที่ α_1 และ α_2 เป็นสัดส่วนของระยะ Δx ในลักษณะเดียวกันกับทิศทาง y ระยะห่างระหว่างจุดคำนวณด้านบนและด้านล่างของจุด (i, j) คือ $\beta_1 \Delta y$ และ $\beta_2 \Delta y$ ตามลำดับ โดยที่ β_1 และ β_2 เป็นสัดส่วนของระยะ Δy และ

อนุพันธ์ $(\partial\phi/\partial x)$ จะคำนวณจากจุด $(i+1,j)$ และ $(i-1,j)$ ดังนี้

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{i+1,j} = \frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\alpha_1\Delta x} \tag{9.34}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{i-1,j} = \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}}{\alpha_2\Delta x} \tag{9.35}$$

ส่วน $(\partial^2\phi/\partial x^2)$ สามารถคำนวณโดยผลต่างศูนย์กลาง

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{i+1,j} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{i-1,j}}{\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta x} \tag{9.36}$$

หรือ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} = \left\{\frac{\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\alpha_1\Delta x} - \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}}{\alpha_2\Delta x}}{(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x}\right\} \tag{9.37}$$

ในลักษณะเดียวกัน

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\Big|_{i,j} = \left\{\frac{\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{\beta_1\Delta y} - \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{\beta_2\Delta y}}{(\beta_1+\beta_2)\Delta y}\right\} \tag{9.38}$$

แทนค่าผลต่างแบบจำกัดลงในสมการ (9.9) ณ ตำแหน่ง (i,j)

$$\left\{\frac{\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\alpha_1\Delta x} - \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}}{\alpha_2\Delta x}}{(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x}\right\} + \left\{\frac{\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{\beta_1\Delta y} - \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{\beta_2\Delta y}}{(\beta_1+\beta_2)\Delta y}\right\} = f_{i,j} \tag{9.39}$$

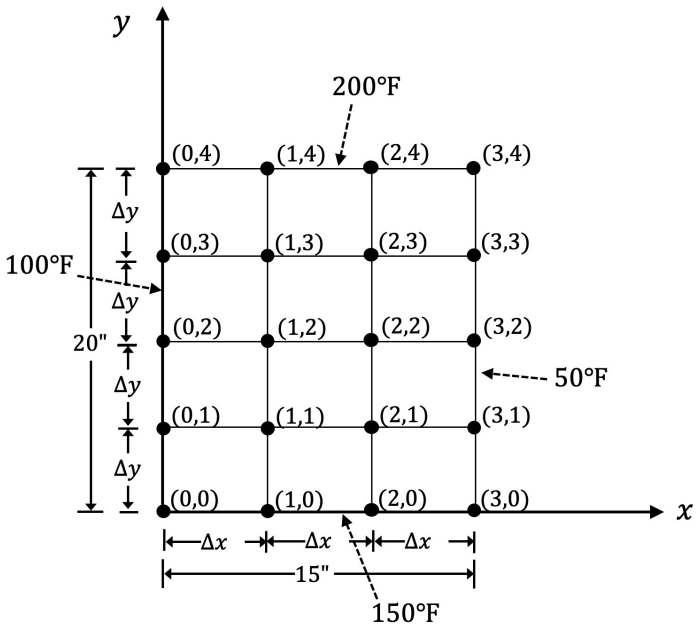
เงื่อนไขขอบเขตของ $\phi(x,y)$ ที่กำหนดให้จะแทนค่าลงใน (9.39)

ตัวอย่าง 9.1. *จงคำนวณหาการกระจายตัวของอุณหภูมิในแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 15 × 20 in. จากสมการลาปลาซ (Laplace's equation) ต่อไปนี้ด้วย* $\Delta x = \Delta y = 5$ *โดยมีรายละเอียดดังรูป 9.5*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{E1}$$

วิธีทำ *จากรูป 9.5 ใช้ผลต่างศูนย์กลางกับสมการ* (E1) *ที่จุด* $(1,1)$ *จะได้*

$$\frac{T_{01}-2T_{11}+T_{21}}{\Delta x^2} + \frac{T_{12}-2T_{11}+T_{10}}{\Delta y^2} = 0 \tag{E2}$$



รูปที่ 9.5: กริดคำนวณผลต่างแบบจำกัดของแผ่นสี่เหลี่ยม

เนื่องจาก $T_{01} = 100$ *และ* $T_{10} = 150$ *สมการ* (E2) *เขียนใหม่ได้ว่า*

$$-4T_{11} + T_{12} + T_{21} + 250 = 0 \tag{E3}$$

ใช้วิธีเดียวกันกับจุดด้านใน $(2,1), (1,2), (2,2), (1,3)$ *และ* $(2,3)$ *ก็จะได้*

$$T_{11} - 4T_{21} + T_{22} + 200 = 0 \tag{E4}$$

$$-4T_{12} + T_{22} + T_{13} + T_{11} + 100 = 0 \tag{E5}$$

$$T_{12} + 4T_{22} + T_{23} + T_{21} + 50 = 0 \tag{E6}$$

$$-4T_{13} + T_{23} + T_{12} + 300 = 0 \tag{E7}$$

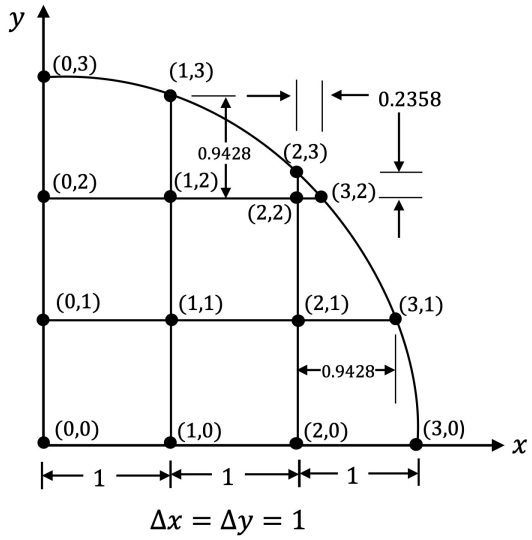
$$T_{13} - 4T_{23} + T_{22} + 250 = 0 \tag{E8}$$

จัดให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -250 \\ -200 \\ -100 \\ -50 \\ -300 \\ -250 \end{Bmatrix} \tag{E9}$$

ผลเฉลยของสมการ (E9) *คือ* $T_{11} = 116.04555, T_{21} = 103.00208, T_{12} = 111.18013, T_{22} = 95.962730, T_{13} = 132.71222,$ *และ* $T_{23} = 119.66874$

ความแม่นยำของผลลัพธ์สามารถเพิ่มได้ด้วยการใช้ระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ, Δx และ Δy ที่เล็กลง



รูปที่ 9.6: กริดคำนวณผลต่างแบบจำกัดของส่วนโค้ง

ตัวอย่าง 9.2. *จงตั้งสมการผลต่างศูนย์กลางของสมการปัวซอง (Poisson's equation) ต่อไปนี้ที่จุด* $(2,1),(2,2)$ *และ* $(1,2)$ *ในรูป 9.6*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=2xy \tag{E1}$$

วิธีทำ *จากสมการ* (9.39) *ที่จุด* $i=2,j=1;x_2=2,y_1=1;\alpha_1=0.9428,\alpha_2=1,\beta_1=1,\beta_2=1$

$$2\phi_{31}-7.5490\phi_{21}+1.8856\phi_{11}+1.8317\phi_{22}+1.8317\phi_{20}=14.6536 \tag{E2}$$

สมการ (9.39) *ที่จุด* $i=2,j=2;x_2=2,y_2=2;\alpha_1=0.2358,\alpha_2=1,\beta_1=0.2358,\beta_2=1$

$$\phi_{32}-2.5761\phi_{22}+0.2358\phi_{12}+\phi_{23}+0.2358\phi_{21}=2.3312 \tag{E3}$$

จากสมการ (9.39) *ที่จุด* $i=1,j=2;x_1=1,y_2=2;\alpha_1=1,\alpha_2=1,\beta_1=0.9428,\beta_2=1$

$$1.8317\phi_{22}-7.5490\phi_{12}+1.8317\phi_{02}+2\phi_{13}+1.8856\phi_{11}=14.6536 \tag{E4}$$

9.2 สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิก

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิก คือ

$$(c_1\phi_x)_x+(c_2\phi_y)_y+(c_3\phi_z)_z+(c_4\phi_x)+(c_5\phi_y)+(c_6\phi_z)+(c_7\phi)=\phi_t \tag{9.40}$$

โดยที่ c_i เป็นฟังก์ชันของ x,y,z และ t พิจารณาสมการพาราโบลิก

$$\alpha^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t);\qquad 0\le x\le 1 \tag{9.41}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต

$$\begin{aligned}\phi(0,t)&=f(t);\qquad t>0\\ \phi(1,t)&=g(t);\qquad t>0\end{aligned} \tag{9.42}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\phi(x,0) = h(x); \qquad 0 \le x \le 1 \tag{9.43}$$

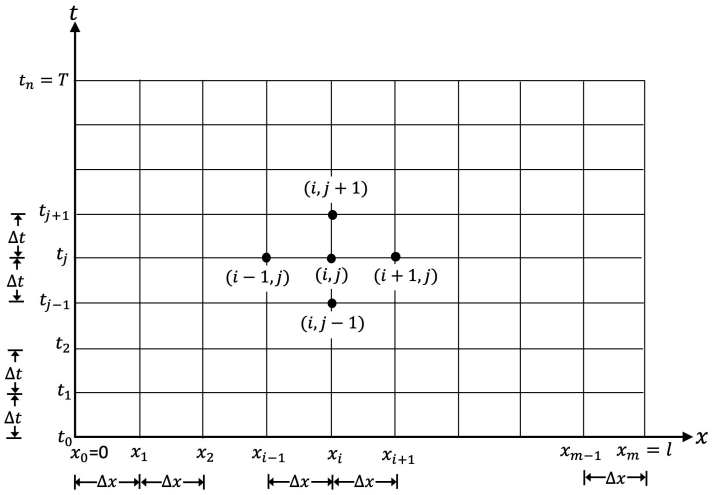
โดยที่ α^2 คือค่าคงที่ สมการข้างต้นนี้ สามารถใช้ผลต่างแบบจำกัดมาคำนวณได้สองวิธี คือ ระเบียบวิธีโดยชัดแจ้ง (explicit) และระเบียบวิธีโดยปริยาย (implicit)

9.2.1 ระเบียบวิธีโดยชัดแจ้ง

พิจารณากริดการคำนวณดังแสดงในรูป 9.7 ใช้ผลต่างแบบจำกัดด้วยการแบ่งช่วงแกน x ออกเป็น m ช่วง ด้วยช่วงการคำนวณ $\Delta x = (l/m)$ และแกนของเวลาแบ่งออกเป็น n ช่วงด้วยลำดับขั้นของเวลา (time step) Δt

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x, \ldots, x_m = m\Delta x = l \tag{9.44}$$

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \ldots, t_j = j\Delta t, \ldots, t_n = n\Delta t = T \tag{9.45}$$



รูปที่ 9.7: กริดการคำนวณผลต่างแบบจำกัดของสมการ (9.41)

โดยที่ T คือเวลาที่สิ้นสุดการคำนวณ สมการผลต่างศูนย์กลางที่จะนำมาใช้กับสมการ (9.41) มีดังนี้

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} \tag{9.46}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{\partial\phi}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta t} \tag{9.47}$$

แทนค่าสมการ (9.46) และ (9.47) ลงในสมการ (9.41) จะได้

$$\phi_{i,j+1} = \phi_{i,j-1} + \frac{2\alpha^2\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}) \tag{9.48}$$

สมการ (9.48) แสดงให้เห็นว่าค่าของตัวแปรตามที่ ลำดับขั้นของเวลาใหม่ สามารถคำนวณได้จากค่าที่รู้แล้วจากลำดับขั้นของเวลาก่อนหน้านี้ ดังนั้นถ้ามีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นก็สามารถคำนวณหาคำตอบได้จาก

$$\phi_{0,j} = f_j = f(t_j); j = 1, 2, \ldots, n \tag{9.49}$$

$$\phi_{m,j} = g_j = g(t_j); j = 1, 2, \ldots, n \tag{9.50}$$

$$\phi_{i,0} = h_i = h(x_i); i = 1, 2, \ldots, m \tag{9.51}$$

สมการ (9.48) สามารถคำนวณหาคำตอบได้ โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (9.49) ถึง (9.51) สังเกตว่า เงื่อนไขขอบเขตในสมการ (9.49) ถึง (9.51) นั้น จะต้องไม่ตรงกับตำแหน่ง $(0,0),(m,0)$ ซึ่งจะทำให้ ค่า $\phi(x,t)$ มีค่าไม่ต่อเนื่อง แต่ค่า ณ ตำแหน่งดังกล่าวสามารถใช้ค่าเฉลี่ยจากตำแหน่งอื่นที่ใกล้เคียงได้

สมการ (9.48) เป็นสมการที่เรียกว่าชัดแจ้งและมีความไม่เสถียรอยู่ เนื่องจากเทอมที่เป็นลบทางด้านขวามือของสมการ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วถ้าสมการผลต่างแบบจำกัดเขียนอยู่ในรูปของ

$$\phi_{i,j+1} = p\phi_{i+1,j} + q\phi_{i,j} + r\phi_{i-1,j} \tag{9.52}$$

สมการจะเสถียรก็ต่อเมื่อ p, q, r เป็นค่าบวก และ $p+q+r \leq 1$ ความไม่เสถียรในสมการ (9.48) สามารถกำจัดได้โดยใช้ผลต่างไปข้างหน้าสำหรับ $(\partial\phi/\partial t)$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{\partial\phi}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} \tag{9.53}$$

แต่สมการ (9.53) จะมีความแม่นยำเพียง $O(\Delta t)$ ถ้าแทนค่าสมการ (9.46) และ (9.53) ลงในสมการ (9.41) จะได้

$$\phi_{i,j+1} = \left(\frac{\alpha^2\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_{i+1,j} + \left(1 - \frac{2\alpha^2\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_{i,j} + \left(\frac{\alpha^2\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_{i-1,j} \tag{9.54}$$

ซึ่งจะมีความแม่นยำเท่ากับ $O(\Delta x^2 + \Delta t)$ และสมการ (9.54) จะเสถียรก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\alpha^2\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \tag{9.55}$$

หรือการตั้งค่าลำดับขั้นของเวลาในการคำนวณให้เท่ากับ

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\alpha^2}\Delta x^2 \tag{9.56}$$

หรือ

$$\phi_{i,j+1} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}) \tag{9.57}$$

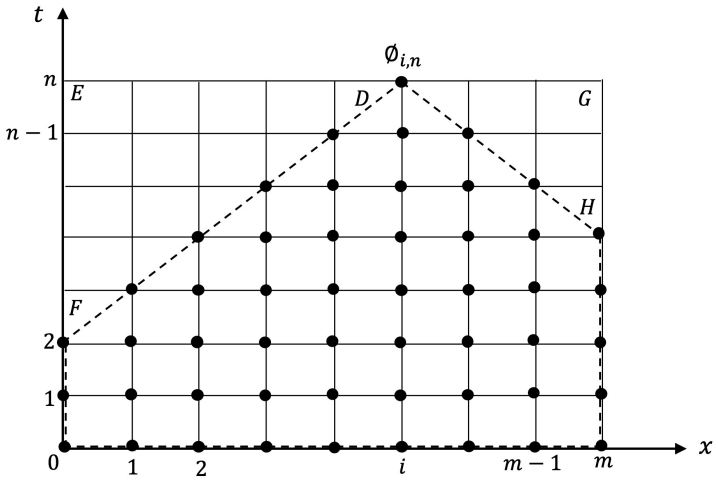
จะเห็นว่าสมการ (9.57) จะมีความแม่นยำที่ลดลง แต่จะทำให้การคำนวณด้วยวิธีชัดแจ้งมีเสถียรภาพสูงขึ้น

9.2.2 ระเบียบวิธีโดยปริยาย

วิธีชัดแจ้งมีข้อเสียในเรื่องของเสถียรภาพ โดยที่

$$0 < \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \tag{9.58}$$

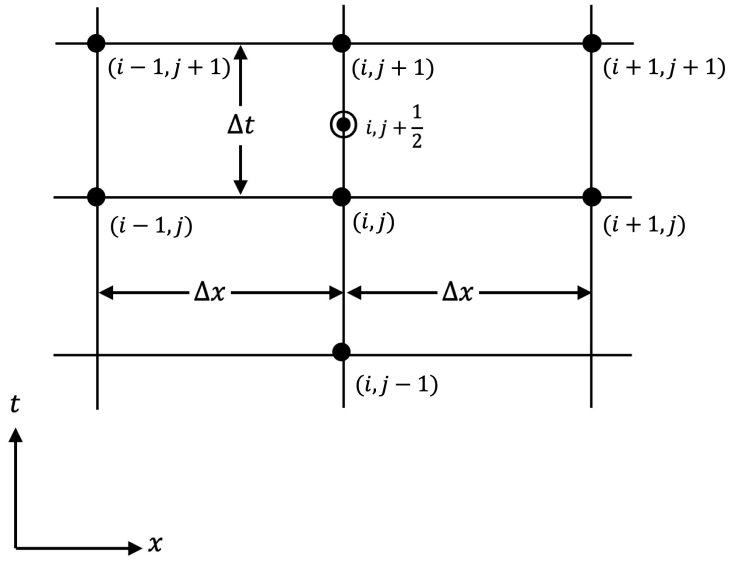
ทำให้การกำหนดค่าลำดับขั้นของเวลา, (Δt) และ ช่วงการคำนวณ, Δx มีข้อจำกัดในการคำนวณในช่วงเวลาค่าลำดับขั้นของเวลาที่สูงมาก และจากรูป 9.8 จะเห็นว่าค่า $\phi_{i,n}$ จะได้รับอิทธิพลจากการคำนวณจากค่าของจุดสีดำในรูป แต่จะไม่ได้รับอิทธิพลจากค่าของกริดการคำนวณในพื้นที่สามเหลี่ยม DEF และ DGH ซึ่งในทางทฤษฎีแล้วผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย $\phi(x,y)$ จะต้องขึ้นอยู่กับค่า ϕ จากทุก ๆ จุดภายในโดเมนของการคำนวณ ระเบียบวิธีโดย



รูปที่ 9.8: กริดการคำนวณของสมการ (9.57)
และขอบเขตของค่า ϕ ที่มีผลต่อการคำนวณ ณ ตำแหน่ง และเวลาใด ๆ

ปริยายเป็นวิธีที่จะแก้ข้อเสียของระเบียบวิธีโดยชัดแจ้งที่กล่าวมาข้างต้น โดยค่าผลต่างแบบจำกัดจะใช้ค่าที่เวลา t_{j+1} มาคำนวณ ดังแสดงในรูป 9.9 โดยที่จะใช้อนุพันธ์ของเวลาที่ $(\partial\phi/\partial t)|_{i,j+\frac{1}{2}}$ ดังนี้

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} \tag{9.59}$$



รูปที่ 9.9: กริดของค่าที่ใช้ในการคำนวณประเภทพาราโบลิกด้วยระเบียบวิธีโดยปริยายในสมการ (9.59)

และ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}} = \theta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j+1} + (1-\theta)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} \tag{9.60}$$

โดยที่

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{9.61}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_{i,j+1} = \frac{\phi_{i+1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} \tag{9.62}$$

สังเกตว่า θ คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก (Weighting parameter) มีค่าในช่วง $0 \le \theta \le 1$ แทนค่าสมการ (9.49) ถึง (9.62) ลงในสมการ (9.41) จะได้สมการผลต่างแบบจำกัดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weight implicit finite-difference) ในรูป

$$\begin{aligned}&\theta\alpha^2\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1,j+1} - 2[1+\frac{\Delta x^2}{\theta\alpha^2\Delta t}]\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1}\right)\right\}\\ &= -(1-\theta)\alpha^2\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1,j} - 2[1+\frac{\Delta x^2}{\theta\alpha^2\Delta t}]\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}\right)\right\}\end{aligned} \tag{9.63}$$

จะเห็นว่าสมการ (9.63) มีตัวไม่รู้ค่าที่ลำดับขั้นของเวลาเท่ากับ $j+1$ มากกว่า 1 ตัว และถ้า $\theta = 0$ สมการ (9.63) จะเหมือนกับสมการ (9.54) ซึ่งก็คือ ระเบียบวิธีโดยชัดแจ้งนั่นเอง และถ้า $\theta = 1$ สมการ (9.63) คือระเบียบวิธีโดยปริยายแบบไปข้างหลัง ดังนี้

$$-\lambda\phi_{i-1,j+1} + (1+2\lambda)\phi_{i,j+1} - \lambda\phi_{i+1,j+1} = \phi_{i,j} \tag{9.64}$$

โดยที่

$$\lambda = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} \tag{9.65}$$

จะเห็นว่า วิธีปริยายนี้เสถียรในทุกช่วงของค่า λ ถ้าใช้สมการ (9.64) กับจุด $i(1 \leq i \leq m_1)$ ก็จะได้ระบบสมการเชิงเส้นจำนวน $m-1$ สมการ ตัวแปรไม่รู้ค่าของ $\phi_{i,j+1}$ จำนวน $m-1$ ตัว และถ้าเงื่อนไขขอบเขต $\phi_{0,j+1} = f(t_{j+1})$ และ $\phi_{m,j+1} = g(t_{j+1})$ จะได้

$$\begin{aligned}
(1+2\lambda)\phi_{1,j+1} - \lambda\phi_{2,j+1} &= \phi_{1,j} + \lambda f(t_{j+1}) \\
-\lambda\phi_{i-1,j+1} + (1+2\lambda)\phi_{i,j+1} - \lambda\phi_{i+1,j+1} &= \phi_{i,j}; i = 2,3,\ldots,m-2 \\
&\vdots \\
-\lambda\phi_{m-2,j+1} + (1+2\lambda)\phi_{m-1,j+1} &= \phi_{m-1,j} + \lambda g(t_{j+1})
\end{aligned} \tag{9.66}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
b_1\beta_1 + c_1\beta_2 &= d_1 \\
a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 &= d_2 \\
a_3\beta_2 + b_3\beta_3 + c_2\beta_3 &= d_3 \\
&\vdots \\
a_i\beta_{i-1} + b_i\beta_i + c_i\beta_{i+1} &= d_i \\
&\vdots \\
a_{m-2}\beta_{m-3} + b_{m-2}\beta_{m-2} + c_{m-2}\beta_{m-1} &= d_{m-2} \\
a_{m-1}\beta_{m-2} + b_{m-1}\beta_{m-1} &= d_{m-1}
\end{aligned} \tag{9.67}$$

โดยที่

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_{m-1} = -\lambda \tag{9.68}$$

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = (1+2\lambda) \tag{9.69}$$

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{m-2} = -\lambda \tag{9.70}$$

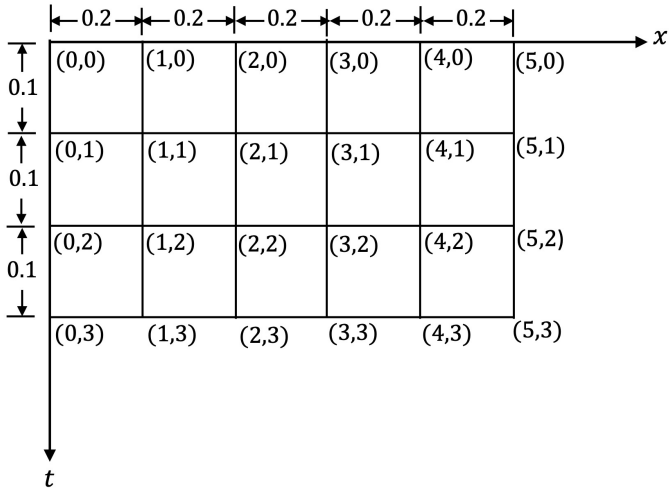
$$d_1 = \phi_{1,j} + \lambda f(t_{j+1}) \tag{9.71}$$

$$d_k = \phi_{k,j}; k = 2,3,\ldots,m-2 \tag{9.72}$$

$$d_{m-1} = \phi_{m-1,j} + \lambda g(t_{j+1}) \tag{9.73}$$

$$\beta_k = \phi_{k,j+1}; k = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{9.74}$$

สมการ (9.67) อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นแบบ Tridiagonal จำนวน $m-1$ สมการที่สามารถคำนวณได้ด้วยวิธีของระบบสมการเชิงเส้นในบทที่ผ่านมา



รูปที่ 9.10: โดเมนการคำนวณของแท่งโลหะ

ตัวอย่าง 9.3. *แท่งโลหะยาว 1 m มีอุณหภูมิเริ่มต้น 70°C ปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิคงที่ 50°C และ 20°C ตามลำดับ ใช้ $\alpha^2 = 0.1 m^2/min$, $\Delta x = 0.2m$ และ $\Delta t = 0.1 min$ จงคำนวณหาการกระจายตัวของอุณหภูมิในแท่งโลหะ ในช่วง $0 \le t \le 0.3 min$*

วิธีทำ *กำหนดให้ $\Delta x = 0.2m$ และ $\Delta t = 0.1 min$ กริดการคำนวณ แสดงได้ดังรูป 9.10 เนื่องจาก $T(x, 0) = 70°C$ และกำหนดให้ T_{00} และ T_{50} มีค่าดังนี้*

$$T_{00} = \frac{70+50}{2} = 60°C, T_{50} = \frac{70+20}{2} = 45°C$$

และ $T_{0j} = 50°C$ และ $T_{5j} = 20°C$ และ

$$\frac{\alpha^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{(0.1)(0.1)}{(0.2)^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

แสดงว่าวิธีนี้จะมีความเสถียร พิจารณาสมการ (9.54) *จะได้*

$$T_{i,j+1} = 0.25T_{i+1,j} + 0.5T_{i,j} + 0.25T_{i-1,j} \tag{E1}$$

สำหรับ $j = 0$ *สมการ* (E1) *จะมีค่าเท่ากับ*

$$T_{i,1} = 0.25T_{i+1,0} + 0.5T_{i,0} + 0.25T_{i-1,0} \tag{E2}$$

จากค่าขอบเขตและค่าเริ่มต้นที่กำหนด $T_{00} = 60$ *และ* $T_{50} = 45$, $T_{10} = T_{20} = T_{30} = T_{40} = 70$, $T_{0j} = 50$ *และ* $T_{5j} = 20$ *โดยที่* $j = 1$ *และ* $i = 1, 2, 3, 4$ *สมการ*(E2) *จะมีค่าเท่ากับ*

$$T_{11} = 0.25T_{20} + 0.5T_{10} + 0.25T_{00} = 0.25(70) + 0.5(70) + 0.25(60) = 67.5°C$$

$$T_{21} = 0.25T_{30} + 0.5T_{20} + 0.25T_{10} = 0.25(70) + 0.5(70) + 0.25(70) = 70.0°C$$

$$T_{31} = 0.25T_{40} + 0.5T_{30} + 0.25T_{20} = 0.25(70) + 0.5(70) + 0.25(70) = 70.0°C$$

$$T_{41} = 0.25T_{50} + 0.5T_{40} + 0.25T_{30} = 0.25(45) + 0.5(70) + 0.25(70) = 63.75°C$$

สำหรับค่า $j = 1$

$$T_{i,2} = 0.25T_{i+1,1} + 0.5T_{i,1} + 0.25T_{i-1,1} \tag{E3}$$

ด้วย $T_{02} = 50$ *และ* $T_{52} = 20$ *ใช้ค่า* $i = 1, 2, 3, 4$ *ในสมการ* (E3) *จะได้คำตอบ คือ* $T_{12} = 63.75°C$, $T_{22} = 69.375°C$, $T_{32} = 68.4375°C$, *และ* $T_{42} = 54.375°C$

สำหรับค่า $j = 2$

$$T_{i,3} = 0.25T_{i+1,2} + 0.5T_{i,2} + 0.25T_{i-1,2} \tag{E4}$$

ด้วย $T_{03} = 50$ *และ* $T_{53} = 20$ *ใช้ค่า* $i = 1, 2, 3, 4$ *ในสมการ* (E4) *จะได้คำตอบ คือ* $T_{13} = 61.71875°C$, $T_{23} = 67.734375°C$, $T_{33} = 65.15625°C$, *และ* $T_{43} = 49.296875°C$

9.3 ระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสัน (Crank–Nicolson method)

จากสมการ (9.63) ถ้า $\theta = \frac{1}{2}$ จะเรียกว่าระเบียบวิธีแครงค์–นิโคลสันซึ่งจะมีรูปสมการดังนี้

$$-\lambda\phi_{i-1,j+1} + 2(1+\lambda)\phi_{i,j+1} - \lambda\phi_{i+1,j+1} = \lambda\phi_{i-1,j} + 2(1-\lambda)\phi_{i,j} + \lambda\phi_{i+1,j} \tag{9.75}$$

จากสมการ (9.65) จะเห็นได้ว่าวิธีนี้ไม่มีข้อจำกัดด้านเสถียรภาพ และมีความแม่นยำเป็น $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$ สมการ (9.75) จะคล้ายกับสมการ (9.64) นั่นก็คือการจัดรูปสมการในแต่ละจุดของการคำนวณจะอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นแบบ Tridiagonal และถ้า $\theta = ((6\lambda - 1/12\lambda))$ ถูกนำมาใช้ในสมการ (9.63) ความแม่นยำจะเพิ่มเป็น $O(\Delta x^4)$ และถ้า $\lambda = (1/\sqrt{20})$ ความแม่นยำจะเพิ่มเป็น $O(\Delta x^6)$ แต่ความแม่นยำจะไม่เป็นตามที่กล่าวมาข้างต้น หากรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่อยู่ในรูปของสมการ (9.51)

ตัวอย่าง 9.4. *แท่งโลหะยาว 1 Meter มีอุณหภูมิเริ่มต้น 70°C ปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิคงที่ 50°C และ 20°C ตามลำดับ ใช้ $\alpha^2 = 0.1 m^2/min$, $\Delta x = 0.2 m$ และ $\Delta t = 0.3 min$ จงคำนวณหาการกระจายตัวของอุณหภูมิในแท่งโลหะ ในช่วง $0 \le t \le 0.3 min$*

วิธีทำ *กำหนดให้ $\Delta x = 0.2$ และ $\Delta t = 0.3$ จะได้ค่า λ*

$$\lambda = \frac{\alpha^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{(0.1)(0.3)}{(0.2)^2} = 0.75$$

ซึ่งไม่กระทบต่อเสถียรภาพของระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสันและจากเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น ที่ $j = 0$ สมการ (9.75) จะมีค่าเท่ากับ

$$0.75T_{i-1,0} + 0.5T_{i,0} + 0.75T_{i+1,0} + 0.75T_{i-1,1} - 3.50T_{i,1} + 0.75T_{i+1,1} = 0 \tag{E1}$$

ที่ $i = 1$

$$0.75T_{00} + 0.5T_{10} + 0.75T_{20} + 0.75T_{01} - 3.50T_{11} + 0.75T_{21} = 0$$

$$177.5 - 3.50T_{11} + 0.75T_{21} = 0 \tag{E2}$$

ที่ $i = 2$

$$0.75T_{10} + 0.5T_{20} + 0.75T_{30} + 0.75T_{11} - 3.5T_{21} + 0.75T_{31} = 0$$

$$140.0 + 0.75T_{11} - 3.5T_{21} + 0.75T_{31} = 0 \tag{E3}$$

ที่ $i = 3$

$$0.75T_{20} + 0.5T_{30} + 0.75T_{40} + 0.75T_{21} - 3.50T_{31} + 0.75T_{41} = 0$$

$$140.0 + 0.75T_{21} - 3.5T_{31} + 0.75T_{41} = 0 \tag{E4}$$

ที่ $i = 4$

$$0.75T_{30} + 0.5T_{40} + 0.75T_{50} + 0.75T_{31} - 3.50T_{41} + 0.75T_{51} = 0$$

$$155.0 + 0.75T_{31} - 3.5T_{41} = 0 \tag{E5}$$

สมการ (E2) *ถึง* (E5) *สามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ว่า*

$$\begin{bmatrix} 3.5 & -0.75 & 0 & 0 \\ -0.75 & 3.5 & -0.75 & 0 \\ 0 & -0.75 & 3.5 & -0.75 \\ 0 & 0 & -0.75 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 177.5 \\ 140.0 \\ 140.0 \\ 155.0 \end{Bmatrix} \tag{E6}$$

และผลเฉลยของวิธีนี้ คือ $T_{11} = 65.3751, T_{21} = 68.4171, T_{31} = 67.2381$ *และ* $T_{41} = 58.6939$

9.4 สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิกสองมิติ

วิธีคำนวณของสมการพาราโบลิก ที่กล่าวมาข้างต้นสามารถนำมาใช้กับสมการพาราโบลิกแบบสองมิติได้ แต่มีข้อจำกัดโดยพิจารณาจากสมการ

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial t} \tag{9.76}$$

ถ้าหากใช้ผลต่างศูนย์กลางในมิติของ x และ y แล้วใช้ผลต่างไปข้างหน้าในมิติของ t จะได้ว่า

$$\frac{\phi_{i+1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} = \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta t} \tag{9.77}$$

ถึงแม้ว่า วิธีนี้จะสามารถคำนวณหาคำตอบได้โดยตรง แต่การกำหนดระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณและ ระยะ

เวลาห่างของแต่ละจุดการคำนวณจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข

$$\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)\leq\frac{1}{2} \tag{9.78}$$

พิจารณาระเบียบวิธีโดยปริยายไปข้างหลังของสมการ (9.76) และกำหนดให้ $\Delta x=\Delta y$ ก็จะได้

$$-\lambda\phi_{i-1,j,k+1}-\lambda\phi_{i,j-1,k+1}+(1+4\lambda)\phi_{i,j,k+1}-\lambda\phi_{i+1,j,k+1}-\lambda\phi_{i,j+1,k+1}=\phi_{i,j,k} \tag{9.79}$$

โดยที่

$$\lambda=\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tag{9.80}$$

จะเห็นได้ว่าวิธีนี้จะมีขีดจำกัดของเสถียรภาพ และจะสังเกตว่าสมการ (9.79) มีตัวแปรที่ไม่รู้ค่า 5 ตัวต่อหนึ่งสมการ ทำให้รูปสมการออกมาเป็นระบบสมการเชิงเส้นแต่ไม่ได้อยู่ในรูปของระบบ Tridiagonal ซึ่งวิธีที่เคยใช้กับระบบ Tridiagonal อาจจะไม่ใช่วิธีที่ดีที่สุดกับระบบสมการสองมิตินี้ ระเบียบวิธีแครงค์–นิโคลสันสำหรับสมการสองมิติก็จะมีลักษณะ และมีเงื่อนไขเช่นเดียวกับระเบียบวิธีโดยปริยายไปข้างหลัง

9.5 สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทไฮเปอร์โบลิก

ในงานวิศวกรรมหลาย ๆ ด้าน มักจะเกี่ยวข้องกับการพาของสสาร, คลื่นเสียง หรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งมักจะมีสมการควบคุมอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไฮเปอร์โบลิก เช่น

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{9.81}$$

โดยที่ c คือ ความเร็วตัวกลางในสมการไฮเปอร์โบลิกอันดับที่หนึ่ง หรือ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{9.82}$$

โดยที่ c คือความเร็วของคลื่น (Wave propagation velocity) ซึ่งทั้งสองสมการข้างต้นสามารถใช้วิธีการคำนวณวิธีเดียวกันได้

วิธีผลต่างแบบจำกัดสามารถนำมาใช้กับสมการไฮเปอร์โบลิกได้ ถ้าผลเฉลยของสมการมีความต่อเนื่อง อย่างไรก็ตามธรรมชาติของผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกมักจะมีการกระโดด หรือไม่ต่อเนื่องของค่าคำตอบ เพราะฉะนั้นการนำเอาวิธีผลต่างแบบจำกัดมาแก้ปัญหาจะต้องนำมาใช้อย่างระมัดระวัง

9.5.1 วิธีผลต่างแบบจำกัดสำหรับสมการอันดับที่หนึ่ง (First-order)

พิจารณาสมการอันดับหนึ่ง

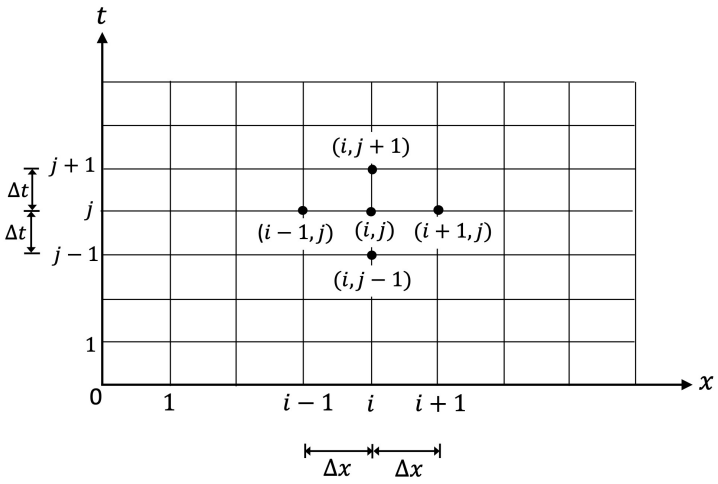
$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{9.83}$$

กับเงื่อนไข

$$\phi(0,t) = f(t) \text{ (boundary condition)} \tag{9.84}$$

$$\phi(x,0) = g(x) \text{ (initial condition)} \tag{9.85}$$

โดยที่ $c > 0$ กริดการคำนวณมีลักษณะดังรูป 9.11 และสามารถใช้วิธีผลต่างแบบจำกัดได้หลายแบบดังนี้



รูปที่ 9.11: กริดการคำนวณของผลต่างแบบจำกัด

Backward differences in space และ Forward differences in time

วิธีนี้ใช้การประมาณผลต่างแบบจำกัด ดังนี้

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} \text{ (ผลต่างไปข้างหลัง)} \tag{9.86}$$

และ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} \text{ (ผลต่างไปข้างหน้า)} \tag{9.87}$$

สมการ (9.83) สามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} + c\left(\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}\right) = 0 \tag{9.88}$$

หรือ

$$\phi_{i,j+1} = \alpha\phi_{i-1,j} + (1-\alpha)\phi_{i,j} \tag{9.89}$$

โดยที่

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

α มีชื่อเรียกว่า Courant number และผลเฉลยสามารถคำนวณได้จากสมการ (9.89) ได้โดยตรง ถ้า $c < 0$ เทอมของอนุพันธ์จะใช้ผลต่างไปข้างหน้าแทนการใช้ผลต่างไปข้างหลัง สมการ (9.83) จะเขียนได้ว่า

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} + c\left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}\right) = 0 \tag{9.90}$$

หรือ

$$\phi_{i,j+1} = -\alpha\phi_{i+1,j} + (1+\alpha)\phi_{i,j} \tag{9.91}$$

การนำสมการ (9.89) หรือ (9.91) มาใช้นั้นจะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ c ซึ่งทั้งสองสมการสามารถนำมารวมให้เป็นสมการเดียวกันแล้วนำไปใช้โดยไม่ขึ้นกับเครื่องหมายของ c ได้ดังนี้

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} + c\left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}\right) - \frac{|c|\Delta x}{2}\left(\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right) = 0 \tag{9.92}$$

หรือ

$$\phi_{i,j+1} = (1-|\alpha|)\phi_{i,j} + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{|\alpha|}{2}\right)\phi_{i+1,j} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{|\alpha|}{2}\right)\phi_{i-1,j} \tag{9.93}$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (9.92) ได้ใช้ผลต่างศูนย์กลางสำหรับเทอม $(\partial\phi/\partial x)$ และมีการเพิ่มเทอมที่สาม ซึ่งเรียกว่าความหนืดเชิงตัวเลข (Numerical viscosity) เข้าไปในสมการ วิธีผลต่างไปข้างหลังสำหรับระยะทาง และผลต่างไปข้างหน้าสำหรับเวลาจะทำให้มีเสถียรภาพ ถ้า $\alpha < 1$

วิธีผลต่างศูนย์กลางสำหรับระยะทาง และผลต่างไปข้างหลังสำหรับเวลา

ด้วยการใช้

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}|_{i,j+1} = \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}}{2\Delta x} \tag{9.94}$$

และ

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}|_{i,j+1} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} \tag{9.95}$$

สมการ (9.83) จะเขียนได้ว่า

$$\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{\Delta t}+c\left(\frac{\phi_{i+1,j+1}-\phi_{i-1,j+1}}{2\Delta x}\right)=0 \tag{9.96}$$

หรือ

$$-\frac{\alpha}{2}\phi_{i-1,j+1}+\phi_{i,j+1}+\frac{\alpha}{2}\phi_{i+1,j+1}=\phi_{i,j} \tag{9.97}$$

สมการ (9.97) จะมีตัวไม่รู้ค่าสองตัว คือ $\phi_{i,j+1}$ และ $\phi_{i+1,j+1}$ ซึ่งสามารถใช้วิธีประมาณค่านอกช่วง (Extrapolation) กับ ค่า $\phi_{i+1,j+1}$ ดังนี้

$$\phi_{i+1,j+1}=2\phi_{i,j+1}-\phi_{i-1,j+1} \tag{9.98}$$

สมการ (9.97) สามารถเขียนใหม่ ได้ว่า

$$-\frac{\alpha}{2}\phi_{i-1,j+1}+(1+\alpha)\phi_{i,j+1}=\phi_{i,j};i=1,2,\ldots \tag{9.99}$$

ผลเฉลยสามารถคำนวณได้จากสมการ (9.99) และวิธีนี้จะไม่มีข้อจำกัดของเสถียรภาพ

9.5.2 วิธีสำหรับสมการอันดับสอง (Second-order)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไฮเปอร์โบลิกอันดับสอง

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}=0;0\le x\le 1;0\le t\le T \tag{9.100}$$

กับเงื่อนไขขอบเขต

$$\phi(0,t)=0;0\le t\le T \tag{9.101}$$

$$\phi(1,t)=0;0\le t\le T \tag{9.102}$$

$$\phi(x,0)=f(x);0\le x\le 1 \tag{9.103}$$

$$\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t}=g(x);0\le x\le 1 \tag{9.104}$$

โดยที่ α^2 เป็นค่าคงที่ และมีกริดการคำนวณแสดงดังรูป 9.11 จากการใช้ผลต่างศูนย์กลางจะเขียนสมการ (9.100) ได้ดังนี้

$$\left(\frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}}{\Delta t^2}\right)-\alpha^2\left(\frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)=0 \tag{9.105}$$

วิธีนี้จะมีความแม่นยำเป็น $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ และสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\phi_{i,j+1}=2(1-\lambda)\phi_{i,j}+\lambda(\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j})-\phi_{i,j-1};i=1,2,\ldots,m-1;j=1,2,\ldots \tag{9.106}$$

โดยที่

$$\lambda = \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \tag{9.107}$$

วิธีนี้จะเสถียรที่ $\lambda \leq 1$ และเงื่อนไขเริ่มต้นจากสมการ (9.104) สามารถใช้ผลต่างแบบจำกัดมาประมาณได้ด้วยวิธีผลต่างไปข้างหลังที่ $t = t_1$

$$\frac{\partial \phi_{i,1}}{\partial t} = \frac{\phi_{i,1} - \phi_{i,0}}{\Delta t} = g(x_i); i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{9.108}$$

และจากค่าเงื่อนไขเริ่มต้นสามารถเขียนใหม่ได้

$$\phi_{i,1} = \phi_{i,0} + \Delta t g(x_i) = f(x_i) + \Delta t g(x_i); i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{9.109}$$

สมการ (9.109) มีความแม่นยำแค่ $O(\Delta t)$ อีกวิธีหนึ่งในการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นจากสมการ (9.104) คือการเพิ่มเทอมจากอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้ว่า

$$\frac{\phi(x_i, t_1) - \phi(x_i, 0)}{\Delta t} = \frac{\partial \phi(x_i, 0)}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi(x_i, 0)}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \tag{9.110}$$

พิจารณาสมการ (9.100) ที่ $t = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi(x_i, 0)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi(x_i, 0)}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\phi(x_i, 0)] = \alpha^2 \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \tag{9.111}$$

แทนค่าสมการ (9.104) และสมการ (9.111) ลงในสมการ (9.110) จะได้

$$\frac{\phi(x_i, t_1) - \phi(x_i, 0)}{\Delta t} = g(x_i) + \frac{\Delta t \alpha^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \tag{9.112}$$

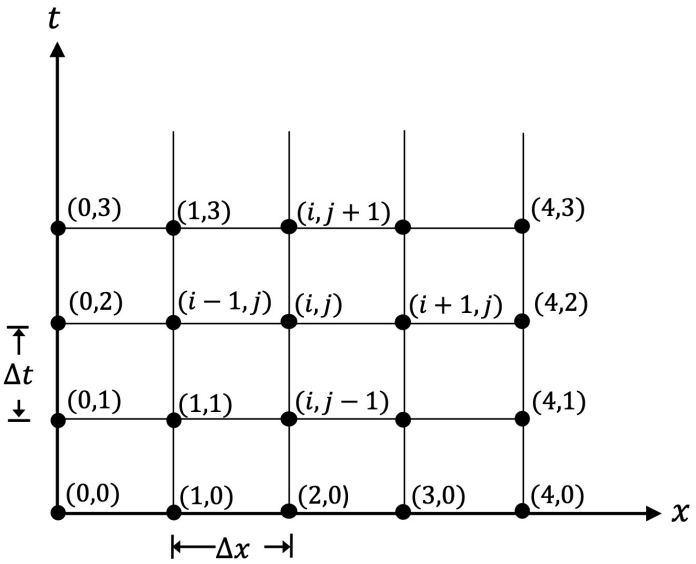
ซึ่งมีความแม่นยำเป็น $O(\Delta t^2)$ และใช้ผลต่างศูนย์กลางกับเทอม $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_i)$ สมการ (9.112) จะเขียนได้ว่า

$$\phi_{i,1} = \phi_{i,0} + \Delta t g(x_i) + \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] \tag{9.113}$$

จากนั้นใช้เงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (9.113) ไปคำนวณหาผลเฉลยได้จากสมการ (9.106)

ตัวอย่าง 9.5. *จงคำนวณหาคำตอบจากสมการต่อไปนี้*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, 0 \leq x \leq 1 \tag{E1}$$



รูปที่ 9.12: กริดการคำนวณ

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต

$$\phi(0,t) = 0, t > 0 \tag{E2}$$

$$\phi(1,t) = 0, t > 0 \tag{E3}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\phi(x,0) = \sin \pi x; 0 \le x \le 1 \tag{E4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) = 0; 0 \le x \le 1 \tag{E5}$$

วิธีทำ

ใช้ผลต่างศูนย์กลางจะได้ว่า

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} - \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{E6}$$

หรือ

$$\phi_{i,j+1} = 2(1 - r^2)\phi_{i,j} + r^2(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}) - \phi_{i,j-1} \tag{E7}$$

โดยที่ $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ *และกำหนดกริดการคำนวณดังแสดงในรูป 9.12*

สมการ (E7) *สำหรับ* $i = 1, 2, 3$ *คือ*

$$\phi_{i,j+1} = \frac{3}{2}\phi_{i,j} + \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}) - \phi_{i,j-1}; i = 1, 2, 3 \tag{E8}$$

ที่ตำแหน่ง $j = 0$ *สมการ* (E8) *เขียนได้ว่า*

$$\phi_{i,1} = \frac{3}{2}\phi_{i,0} + \frac{1}{8}(\phi_{i+1,0} + \phi_{i-1,0}); i = 1, 2, 3 \tag{E9}$$

แทนค่าจากเงื่อนไขเริ่มต้น จะเขียนสมการ (E9) *ได้ว่า*

$$\phi_{1,1} = \frac{3}{4}\phi_{1,0} + \frac{1}{8}(\phi_{2,0} + \phi_{0,0}) = \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}(\sin\frac{\pi}{2} + \sin 0) = 0.6553$$
$$\phi_{2,1} = \frac{3}{4}\phi_{2,0} + \frac{1}{8}(\phi_{3,0} + \phi_{1,0}) = \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}(\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) = 0.9268$$
$$\phi_{3,1} = \frac{3}{4}\phi_{3,0} + \frac{1}{8}(\phi_{4,0} + \phi_{2,0}) = \frac{3}{4}\sin\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{8}(\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}) = 0.6553$$

สำหรับ $j = 1$

$$\phi_{i,2} = \frac{3}{2}\phi_{i,1} + \frac{1}{4}(\phi_{i+1,1} + \phi_{i-1,1}) - \phi_{i,0}$$

$$\phi_{1,2} = \frac{3}{2}\phi_{1,1} + \frac{1}{4}(\phi_{2,1} + \phi_{0,1}) - \phi_{1,0} = 0.50755$$
$$\phi_{2,2} = \frac{3}{2}\phi_{2,1} + \frac{1}{4}(\phi_{3,1} + \phi_{1,1}) - \phi_{2,0} = 0.71785$$
$$\phi_{3,2} = \frac{3}{2}\phi_{3,1} + \frac{1}{4}(\phi_{4,1} + \phi_{2,1}) - \phi_{3,0} = 0.50755$$

สำหรับ $j = 2$

$$\phi_{i,3} = \frac{3}{2}\phi_{i,2} + \frac{1}{4}(\phi_{i+1,2} + \phi_{i-1,2}) - \phi_{i,1}$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยมีค่าเท่ากับ

$$\phi_{1,3} = \frac{3}{2}\phi_{1,2} + \frac{1}{4}(\phi_{2,2} + \phi_{0,2}) - \phi_{1,1} = 0.28549$$
$$\phi_{2,3} = \frac{3}{2}\phi_{2,2} + \frac{1}{4}(\phi_{3,2} + \phi_{1,2}) - \phi_{2,1} = 0.40375$$
$$\phi_{3,3} = \frac{3}{2}\phi_{3,2} + \frac{1}{4}(\phi_{4,2} + \phi_{2,2}) - \phi_{3,1} = 0.28549$$

ผลเฉลยจริงของสมการ (E1) *คือ*

$$\phi_{x,t} = \sin\pi x \cos\pi t \tag{E10}$$

จะได้คำตอบมีค่าเท่ากับ

$$\phi_{1,3} = \phi(0.25, 0.375) = 0.27059$$

$$\phi_{2,3} = \phi(0.5, 0.375) = 0.38268$$

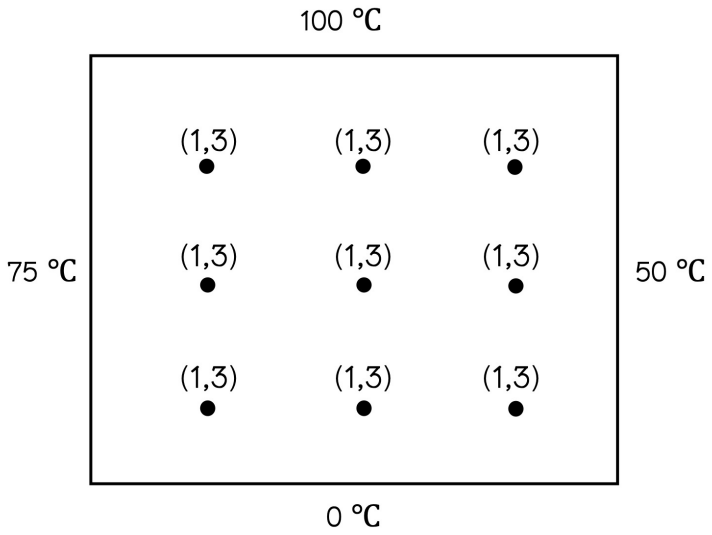
$$\phi_{3,3} = \phi(0.75, 0.375) = 0.27059$$

ความแม่นยำของวิธีผลต่างแบบจำกัดสามารถเพิ่มได้ด้วยการลดขนาดระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ (Δx) และระยะเวลาห่างของแต่ละจุดการคำนวณ (Δt)

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิในแผ่นเรียบสองมิติดังรูป 9.13 อธิบายได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



รูปที่ 9.13: รูปของแผ่นเรียบสองมิติ

2. ถ้าหากขอบด้านล่างของโจทย์ข้อที่ผ่านมาเปลี่ยนจากอุณหภูมิคงที่ให้เป็นขอบที่หุ้มฉนวน นอกนั้นเหมือนเดิม จงคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิของแผ่นสองมิตินี้

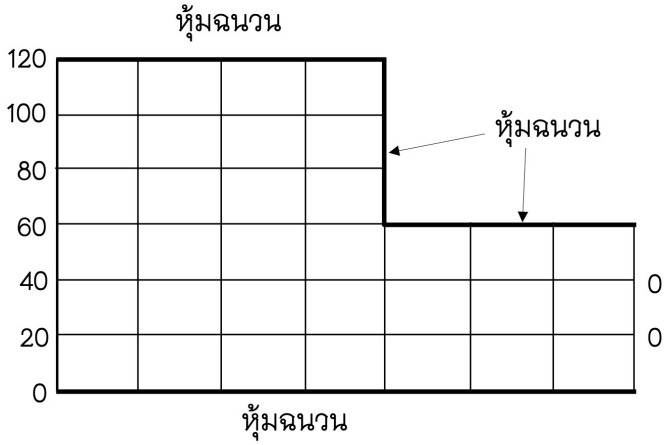
3. จงคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิในแผ่นเรียบรูปตัว L สองมิติดังรูป 9.14 อธิบายได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

4. สมการการแพร่-การพา (Advection–diffusion) ใช้ในการคำนวณความเข้มข้นของสารภายในถัง อธิบายได้ดังสมการ

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U\frac{\partial c}{\partial x} - kc$$

โดยที่ $k = 0.15,\ D = 100,\ U = 1$ จงคำนวณหาความเข้มข้นภายในถังยาว 10 Meters ตั้งแต่เวลา 0 - 100



รูปที่ 9.14: รูปของแผ่นเรียบรูปตัว L สองมิติสำหรับแบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่ 3

sec. ด้วยระเบียบวิธีโดยชัดแจ้งถ้าขณะเริ่มต้นความเข้มข้นภายในถังทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ และความเข้มข้นขาเข้าเป็น 100 กำหนดให้ระยะเวลาห่างของแต่ละจุดการคำนวณ มีค่าเท่ากับ 0.005 และระยะห่างของแต่ละจุดการคำนวณ มีค่าเท่ากับ 1

5. จงคำนวณหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีของแครงก์–นิโคลสัน

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

โดยที่ $u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1$ ที่แต่ละค่าของ $b = -4, 0, 2$

6. การขจัดในแนวแกนที่เกิดจากการสั่นสะเทือนของแท่งโลหะสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

โดยที่ $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $E = 30 \times 10^6$ คือค่า Young's modulus และ $\rho = 0.283$ คือค่าความหนาแน่นของแท่งโลหะ ถ้าแท่งโลหะยาว 20 หน่วย จงคำนวณหาการขจัดในแนวแกน $u = u(x,t)$ จากค่าเงื่อนไขขอบเขต และค่าเงื่อนไขเริ่มต้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
u(0,t) &= 0; t \ge 0;\\
\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) &= 0; t \ge 0;\\
u(x,0) &= u_0(x) = 1; 0 \le x \le 1;\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \dot{u} = 0; 0 \le x \le 1
\end{aligned}$$

10. การประยุกต์ใช้ในงานวิชาการ และกรณีศึกษา

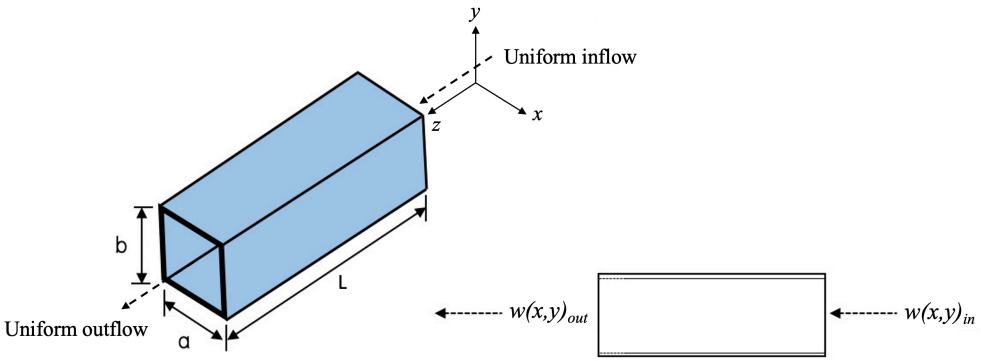
$$\frac{1}{4}\sum_{i,j}\sum_{a,b} t$$

10.1	การคำนวณหารูปร่างความเร็วของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม	267
10.2	การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียรองของหัวฝักบัว	270
10.3	การศึกษาการไหลแบบพัลส์ในท่อตรง	272

บทนี้จะเป็นตัวอย่างการนำเอาเนื้อหาในบทต่าง ๆ ก่อนหน้านี้มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ทางวิศวกรรมและงานวิจัย รวมไปถึงกรณีศึกษาที่ผู้สอนได้มีประสบการณ์มานำเสนอเพื่อเป็นตัวอย่างและแนวทางสำหรับผู้ศึกษาได้นำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

10.1 การคำนวณหารูปร่างความเร็วของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม

ในตัวอย่างนี้เป็นการประยุกต์ใช้การวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) และการคำนวณหาคำตอบสำหรับระบบสมการเชิงเส้น (System of linear equations) มาใช้สำหรับคำนวณหาการกระจายความเร็วของของไหลที่มีความหนืดภายในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัด กว้าง a และ ยาว b หน่วย ดังแสดงในรูป 10.1



รูปที่ 10.1: ท่อสี่เหลี่ยมสำหรับการคำนวณการไหลแบบมีความหนืด

โดยที่สมการควบคุมการไหลของของไหลแบบคงตัว (Uniform flow) และไม่ขึ้นกับเวลา (Steady flow) ของของไหลภายท่อสองมิติ และมีการไหลในแนวแกน z สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \tag{10.1}$$

w คือความเร็วของไหลตามแนวแกน z, $\partial p/\partial z$ คือความดันตกคร่อมภายในท่อ และ μ คือความหนืดของของไหล หากทำให้เป็นตัวสมการแบบไร้มิติจะได้ว่า

$$x_{nd} = \frac{x}{a}, y_{nd} = \frac{y}{b}, w_{nd} = w\left(\frac{-\mu}{b^2 \frac{dp}{dz}}\right) \tag{10.2}$$

สมการ (10.1) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\partial^2 w_{nd}}{\partial x_{nd}^2} + \frac{\partial^2 w_{nd}}{\partial^2 y_{nd}} + 1 = 0 \tag{10.3}$$

โดยมีค่าเงื่อนไขขอบเขตคือ $w_{nd} = 0$ ที่ $x_{nd} = \pm 1$ และ $y_{nd} = \pm 1$ จากการประยุกต์ใช้วิธีผลต่างแบบจำกัด ดังได้กล่าวไว้ในบทการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขและวิธีการเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ถ้าเราละตัวห้อย nd ออกจากสมการจะได้ว่า

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + 1 = 0 \tag{10.4}$$

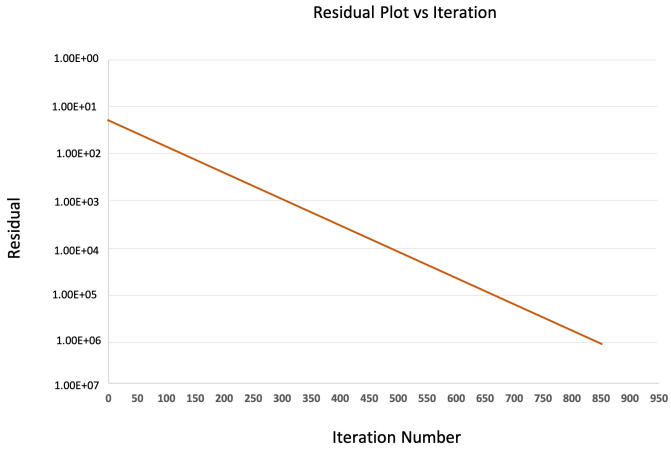
สมการที่ (10.4) สามารถคำนวณหาคำตอบได้ด้วยวิธีการแทนค่าวนซ้ำ ดังได้กล่าวไว้ในบทระบบสมการเชิงเส้น โดยจัดรูปสมการ 10.4 ใหม่จะได้ว่า

$$w_{i,j}^{n+1} = 0.5\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{w_{i+1,j}^n + w_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}\right] / \left[(b/a)^2/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2\right] \tag{10.5}$$

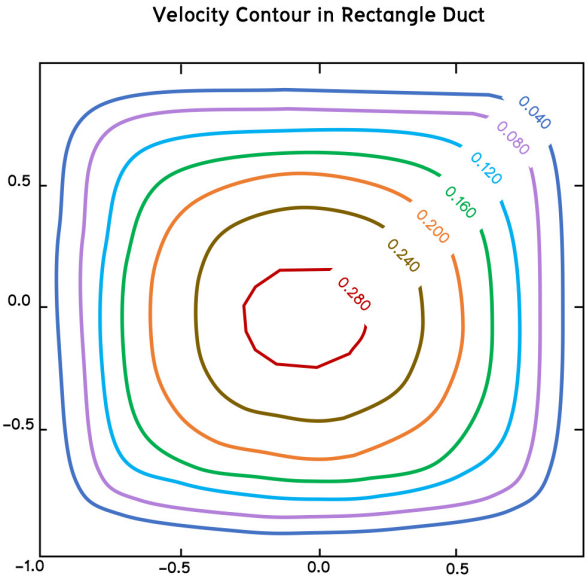
จากนั้นทำการคำนวณหาค่าความเร็วที่ตำแหน่ง (i, j) ต่าง ๆ ได้ด้วยวิธีจาโคบี ในระหว่างการคำนวณสามารถตรวจสอบการลู่เข้าหาคำตอบได้โดยการพิจารณาค่าส่วนที่เหลือ (Residual) ของ w จากสมการ

$$\|\vec{w}^{(n+1)} - \vec{w}^{(n)}\| \leq 10^{-6}$$

รูปที่ 10.2 แสดงให้เห็นถึงการลู่เข้าหาคำตอบ โดยที่เศษของการวนซ้ำ (Residual) มีค่าลดลง และรูปที่ 10.3 แสดงให้เห็นผลการคำนวณของค่าความเร็วของของไหลภายในท่อ w ณ ตำแหน่งพิกัด (i, j) ต่าง ๆ ที่สามารถแสดงให้เห็นการกระจายตัวของความเร็วในแต่ละตำแหน่งภายในท่อ ซึ่งสามารถนำผลการคำนวณนี้ไปใช้งานต่อไปได้



รูปที่ 10.2: ค่าเศษ (Residual) ของ w แสดงให้เห็นการลู่เข้าหาคำตอบของวิธีจาโคบี



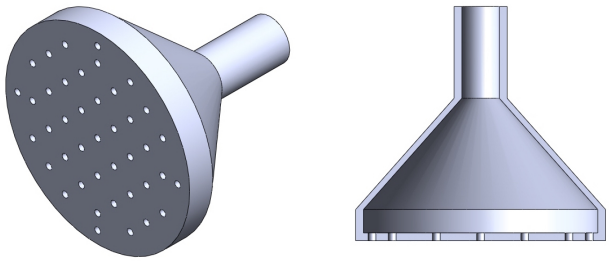
รูปที่ 10.3: ผลการคำนวณค่า ความเร็ว w ของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยมด้วยวิธีจาโคบี

10.2 การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียรองของหัวฝักบัว

ในงานระบบท่อ มักจะมีข้อต่อ วาล์ว และอุปกรณ์เสริมต่าง ๆ ซึ่งมีผลต่อความดันตกคร่อมภายในระบบ และเป็นปัจจัยหลักในการเลือกใช้อุปกรณ์ต้นกำลัง เช่น ปั๊ม หรือโบลเวอร์ เป็นต้น ความดันตกคร่อมในอุปกรณ์แต่ละตัวนั้น มาจากความต้านทานโมเมนตัมของของไหล อันเกิดจากการเข้าไปกีดขวางการไหล เปลี่ยนขนาด หรือเปลี่ยนทิศทางของของไหลนั่นเอง โดยทั่วไปค่าความต้านทานโมเมนตัมนี้จะกำหนดให้อยู่ในรูปของค่าสัมประสิทธิ์ความสูญเสียรอง (Minor loss coefficient), K, และความดันตกคร่อมของอุปกรณ์ดังกล่าวสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$P_{drop} = K\frac{\rho V^2}{2} \tag{10.6}$$

ในกรณีศึกษานี้จะเป็นการเอาการคำนวณเชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาค่า K ของหัวฝักบัว ดังแสดงในรูป 10.4 จากข้อมูลของความดันตกคร่อมที่ได้มาจากการทดลองดังตารางที่ 10.1

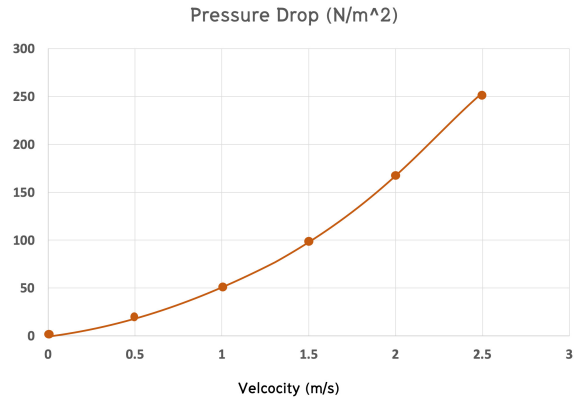


(ก) (ข)

รูปที่ 10.4: ลักษณะของหัวฝักบัว (ก) ภาพไอโซเมตริกของฝักบัว (ข) ภาพตัดแสดงภายในของฝักบัว

ตารางที่ 10.1: ตารางความสัมพันธ์ระหว่างความดันตกคร่อมหัวฝักบัว และความเร็วของอากาศ

velocity (V) (m/s)	V^2 $(m/s)^2$	dP (N/m^2)
0.0	0.0	0.0
0.5	0.25	13.2
1	1	44.1
1.5	2.25	92.3
2.0	4	158.96
2.5	6.25	242.45
Sum	13.75	551.01



รูปที่ 10.5: ความสัมพันธ์ระหว่างความดันตกคร่อมหัวฝักบัว และความเร็วของอากาศที่ไม่เป็นเส้นตรง

จากตารางที่ 10.1 และรูปที่ 10.5 เราจะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างความดันตกคร่อม และความเร็วนั้นไม่เป็นเส้นตรง แต่ถ้าพิจารณาความสัมพันธ์จากสมการ (10.5) จะเห็นได้ว่าความดันตกคร่อม dP มีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรงกับ V^2 ดังนั้นถ้าเราใช้เทคนิคการฟิตเส้นโค้งด้วยวิธีการทำให้เป็นเชิงเส้นที่กล่าวไว้ในบทก่อนหน้านี้มาประยุกต์ใช้ก็จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียรองของหัวฝักบัวนี้ได้ ด้วยวิธีการฟิตเส้นโค้งแบบเส้นตรงระหว่างความดันตกคร่อม dP และค่าความเร็วยกกำลังสอง V^2

$$dP = a_0 + a_1 V^2 \tag{10.7}$$

โดยมีรายละเอียดการคำนวณดังนี้ จากสมการ (4.20) และสมการ (4.21) จะสามารถคำนวณค่า a_0 และ a_1 ได้เท่ากับ

$$a_0 = \overline{dP} - a_1 \overline{v^2} \tag{10.8}$$

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} V_i{}^2 (dP)_i - \sum_{i=1}^{n} V_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} dP_i}{n\sum_{i=1}^{n} (V^2)_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} (V^2)_i\right)^2} \tag{10.9}$$

โดยที่ n คือจำนวนข้อมูล แทนค่าตัวเลขจากตารางลงในสมการจะได้ว่า

$$a_1 = \frac{(6 \times 2406.2275) - (13.75 \times 551.01)}{(6 \times 61.1875) - 13.75^2} = 38.53129 \tag{10.10}$$

$$a_0 = 91.835 - (38.53129 \times 2.2917) = 3.534 \tag{10.11}$$

จากคำตอบที่ได้จากสมการ (10.10) และสมการ (10.6) จะสามารถแสดงได้ว่า

$$P_{drop} = K\frac{\rho V^2}{2} = 38.53129 V^2 \tag{10.12}$$

และค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียรองของหัวฝักบัวสามารถคำนวณได้จาก

$$K = \frac{38.53129 \times 2}{\rho} = \frac{38.53129 \times 2}{1.15} = 67.01 \tag{10.13}$$

วิธีการฟิตเส้นโค้งของข้อมูลที่ได้จากการทดลองจะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณหา**สัมประสิทธิ์การสูญเสียรองของหัวฝักบัว (K) ได้ว่ามีค่าเท่ากับ 67.01** ซึ่งจะสามารถนำค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียรองที่ได้ไปใช้ในการออกแบบระบบที่เกี่ยวข้องต่อไป

10.3 การศึกษาการไหลแบบพัลส์ในท่อตรง

ตัวอย่างนี้เป็นกรณีศึกษาพลศาสตร์ของของไหลภายในท่อตรงที่มีการไหลภายใต้ความดันที่เปลี่ยนแปลงเป็นแบบคาบ และมีลักษณะความเร็วของการไหลเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่ผู้เขียนได้นำไปใช้ในการวิเคราะห์การไหลของเลือดในเส้นเลือด (Khunatorn et al., [12] - [14] และ Shandas et al., [15]) ที่นำมาเสนอในส่วนนี้เป็นเพียงการวิเคราะห์ทางทฤษฎีเบื้องต้น เพื่อนำเสนอถึงแนวทางการนำเอาวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้กล่าวไว้ในบทก่อนหน้านี้ไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะนี้ได้ พิจารณาการไหลภายในท่อกลมตรงที่มีความดันขาเข้าเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบเป็นคาบ ดังสมการที่ (10.14) และกำหนดให้ความดันขาออกคงที่

$$P = A\cos(\omega t) \tag{10.14}$$

ถ้าสมมติฐานในการวิเคราะห์การไหลในกรณีนี้มีดังนี้

1. การไหลเป็นแบบมีความหนืด (Viscous flow)
2. การไหลเป็นแบบราบเรียบ (Laminar flow)
3. การไหลสมมาตรรอบแนวแกน (Axisymmetric flow)
4. การไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่ (Fully developed flow)

ของไหลมีความหนืด การไหลเป็นแบบราบเรียบและการไหลเป็นแบบสมมาตรรอบแกนศูนย์กลางของท่อ ในพิกัดทรงกระบอกจะสามารถแสดงได้ว่า

$$v_\theta = v_r = 0$$
$$v_z = v_z(r,t) \tag{10.15}$$

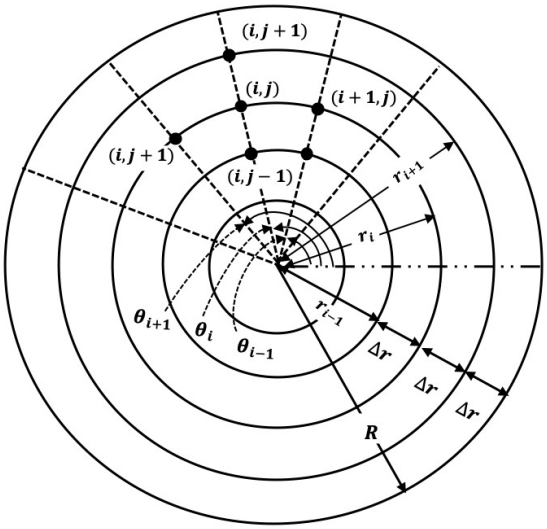
$$\frac{dP}{dz} = -A\cos(\omega t)$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\theta} = 0 \tag{10.16}$$

สมการโมเมนตัมสำหรับทิศทางในแนวแกนการไหล (z) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}\right) \tag{10.17}$$

ความเร็วของการไหลภายในท่อ ณ ตำแหน่งตามแนวรัศมีที่เวลาต่าง ๆ สามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขสำหรับสมการอนุพันธ์ย่อยที่กล่าวไปในบทข้างต้นแล้วโดยมีรายละเอียดของกริดการคำนวณดังรูป 10.6 โดยการประยุกต์ใช้ผลต่างไปข้างหน้าสำหรับอนุพันธ์ต่อเวลา และผลต่างศูนย์กลางสำหรับอนุพันธ์ต่อระยะทาง r ดังนี้



รูปที่ 10.6: กริดการคำนวณของการไหลแบบเป็นคาบภายในท่อตรง

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} \tag{10.18}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} \approx \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{\Delta r} \tag{10.19}$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta r^2} \tag{10.20}$$

แทนค่าสมการที่ (10.18) ถึงสมการที่ (10.20) ลงในสมการที่ (10.17) จะสามารถคำนวณความเร็วของการ

ไหลภายในท่อ ณ ตำแหน่ง ตามแนวรัศมี ที่ เวลาใด ๆ ได้จาก

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r_i}\frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{\Delta r} + \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta r^2}\right] \tag{10.21}$$

ซึ่งในกรณีศึกษานี้จะยกตัวอย่างการไหลของเลือดภายในเส้นเลือดแดงของคน โดยมีรายละเอียดดังแสดงในตารางที่ 10.2

ตารางที่ 10.2: ตารางรายละเอียดของการไหลในเส้นเลือด (กรณีศึกษา)

ความหนาแน่นของเลือด	1060	kg/m^3
ความหนืดของเลือด	0.006	$(N.s/m^2)$
รัศมีของเส้นเลือด	0.5	cm
จังหวะการเต้นของหัวใจ	72	ครั้งต่อนาที
อัตราการไหลเฉลี่ยของเลือด	5	lpm
ความดันตกคร่อมต่อหนึ่งหน่วยความยาวท่อที่สูงที่สุด	2037.18	N/m^2

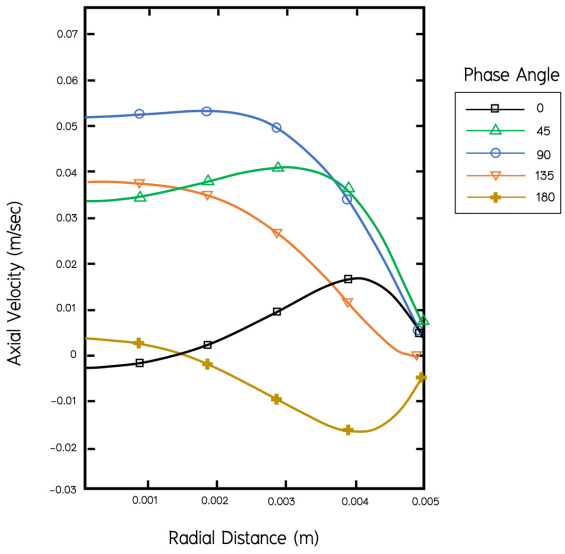
จากข้อมูลในตารางที่ 10.2 เมื่อทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของความเร็วที่ผนัง และอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วต่อระยะทางในแนวรัศมี ณ จุดศูนย์กลางของท่อมีค่าเท่ากับศูนย์ ความดันขาเข้า และความดันขาออกมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยกำหนดท่อมีความยาวเท่า กับ 1 หน่วย จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_z(0,t)}{\partial r} &= 0 \\
v_z(R,t) &= 0 \\
\frac{dP}{dz}(t) &= -2037.18\cos\left(\frac{2\pi(72)}{60}t\right)
\end{aligned} \tag{10.22}$$

ทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับการคำนวณด้วย รูปร่างความเร็วแบบพัฒนาเต็มที่ของการไหลแบบคงตัวในท่อกลม

$$v_z(r) = \frac{1}{4(0.006)}(-2037.18)\left[r^2 - (.005)^2\right] \tag{10.23}$$

ในการคำนวณจะกำหนดจำนวนกริดการคำนวณในแนวรัศมี เท่ากับ 10 จะได้ระยะห่างระหว่างกริดการคำนวณในแนวรัศมี δr มีค่าเท่ากับ 0.0005 m และช่วงเวลาในการคำนวณ δt เท่ากับ .008 s จะทำให้ค่าคงที่ Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) มีค่าเท่ากับ 0.181 (ค่า Courant-Friedrichs-Lewy มีค่าน้อยกว่า 0.5 จะทำให้ได้ผลการคำนวณที่เสถียร) ทำการคำนวณหาค่าความเร็วจากสมการ (10.21) จะได้ผลการคำนวณของความเร็วของเลือดภายในเส้นเลือด ณ เวลาของการไหลที่มุมเฟสต่าง ๆ ของความดันขาเข้าสามารถแสดงได้ดังรูป 10.7



รูปที่ 10.7: ความเร็วเลือดในเส้นเลือด ณ เวลาของการไหลที่มุมเฟสต่าง ๆ ของความดันขาเข้าที่ได้จาก การคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลข

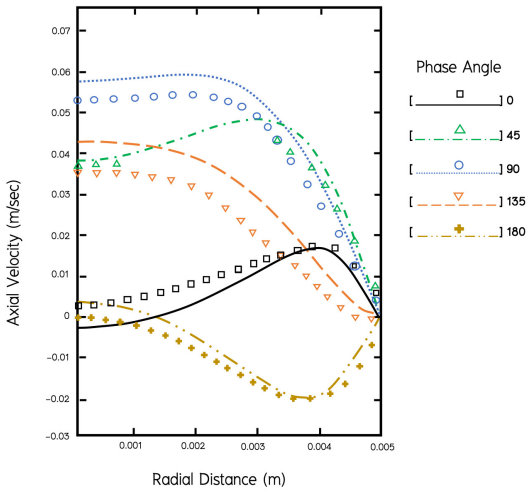
ในทางคณิตศาสตร์สมการ (10.17) อยู่ในรูปของสมการเบสเซล (Bessel equation) ดังนั้นความเร็วในแนวรัศมี ณ เวลาใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ

$$v_z(r) = i\frac{dP}{dz}\frac{R^2}{\mu\Omega^2}\left(1 - \frac{J_0(\zeta)}{J_0(\Lambda)}\right)e^{(i\omega t)} \tag{10.24}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\Omega &= R\sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}} \\
\Lambda &= \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)\Omega \\
\zeta(r) &= \Lambda\frac{r}{R} \\
\omega &= 2\pi f
\end{aligned}$$

J_0 คือฟังก์ชันเบสเซล ชนิดที่หนึ่งอันดับที่ศูนย์ (Bessel function of order zero and of the first kind) เราสามารถเปรียบเทียบคำตอบระหว่างคำตอบที่ได้จากสมการที่ (10.24) และคำตอบจากวิธีการเชิงตัวเลขได้ดังรูป 10.8 ผลการเปรียบเทียบระหว่างคำตอบที่ได้จากสมการเบสเซล และผลการคำนวณจากวิธีการเชิงตัวเลขจะมีค่าที่ไม่เท่ากัน ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าผลการคำนวณจากวิธีการเชิงตัวเลขเป็นผลลัพธ์ประมาณ (Approximate solution) ซึ่งจะมีความคลาดเคลื่อนจากคำตอบจริงตามที่ได้อธิบายอย่างละเอียดไปในบทก่อนหน้านี้แล้ว อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าผลการเปรียบเทียบที่ได้มีความใกล้เคียงกัน ซึ่งผลการคำนวณจากวิธีการเชิงตัวเลขสามารถปรับปรุงให้มีความถูกต้องที่สูงขึ้นได้ด้วยการเพิ่มจำนวนกริดการคำนวณ (ลดขนาด Δr) และลดช่วงเวลาในการคำนวณ (Δt) กรณีศึกษานี้ได้แสดง



รูปที่ 10.8: เปรียบเทียบความเร็วเลือดในเส้นเลือด ณ เวลาของการไหลที่มุมเฟสต่าง ๆ ของความดันขาเข้าระหว่างผลที่ได้จาก การคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลข และผลคำตอบจากฟังก์ชันเบสเซล

ให้เห็นว่าเราสามารถนำเอาวิธีการเชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณหาคำตอบของสมการอนุพันธ์ย่อยได้ และสามารถใช้เป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้กับงานวิเคราะห์ หรือวิจัยที่คล้ายกัน หรือนำไปประยุกต์ใช้กับระบบสมการคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นต่อไปได้

บรรณานุกรม

[1] Chapra, Steven C. and Clough D.E., "Applied Numerical Methods with PYTHON for Engineers and Scientists," McGraw-Hill, 2022.

[2] Kinder J.M. and Nelson P., "A Student's Guide to Python for Physical Modeling," Princeton University Press, 2015

[3] Ayars E., "Computational Physics with PYTHON," Eric Ayars, 2013

[4] Kiusalaas J., "Numercal Methods in Engineering with PYTHON 3," Cambridge University Press, 2013

[5] Chapra, Steven C. and Canale, Raymond P., "Numerical Methods for Engineers," 6th Edition, McGraw-Hill, 2009.

[6] Atkinson K and Han W., "Elementary Numerical Analysis(Third Edition)," John Wiley & Sons, 2004.

[7] Singiresu S. Rao, "Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists," Pearson Education, 2002.

[8] Hoffman, Joe D., "Numerical Methods for Engineers and Scientists," 2nd Edition, Marcel Dekker Inc., 2001.

[9] Borse, G. J., "Numerical Methods with MATLAB: A Resource for Scientists and Engineers," PWS Publishing Company, U.S.A., 1997.

[10] Hanselman, Duane, and Littlefield, Bruce, ”The Student Edition of MATLAB : Version 4 : User’s Guide with Tutorial,” The Mathworks Inc., 1995.

[11] ”Numerical Recipe, the art of scientific computing,” Cambridge University Press

[12] Khunatorn, Y., S. Mahalingam, C. G. DeGroff, and R. Shandas, “A fluid dynamic study of the total cavopulmonry connection of the Fontan operation,” Proceedings of the 11th ICMMB International Conference on Mechanics in Medicine and Biology (published by Pacific Centre of Thermal-Fluids Engineering-PCTFE), pp. 289-291, April 2-5, Maui, Hawaii, 2000.

[13] Khunatorn, Y., S. Mahalingam, R. Shandas, and C. DeGroff, “Influence of connection geometry and SVC-IVC flow rate ratio on flow structures within the total cavopulmonary connection: A numerical study,” ASME Journal of Biomechanical Engineering, 364-377,2002.

[14] Khunatorn, Y., R. Shandas, C. DeGroff, and S. Mahalingam, “Comparison of in vitro velocity field measurements in a scaled total cavopulmonary connection with computational predictions” submitted, Annals of Biomedical Engineering, 31(7),810-822,2002.

[15] Shandas, R., Y Khunatorn, C DeGroff, W Orlando, S Mahalingam, L. Valdos-Cruz,”An assessment of the major flow features that affect energy loss and potential for thrombus formation within the modified total cavo-pulmonary connection: computational and scaled in-vitro studies”, Journal of the American College of Cardiology 39, 407,2002

ดัชนี

กฎของเครเมอร์, 89
การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด, 81, 85
  การถดถอยพหุนาม, 92
  การถดถอยหลายตัวแปร, 99
  การถดถอยเชิงเส้น, 86
  การถดถอยไม่เป็นเชิงเส้น, 95
การประมาณค่านอกช่วง, 82, 209
การประมาณค่าในช่วง, 81, 102
  การประมาณค่าในช่วงควอดราติก, 103
  การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันเสมือนพหุนาม, 108
  การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น, 102
  การประมาณค่าในช่วงแบบพหุนาม, 106
การฟิตด้วยคอลโลเคชันแบบพหุนาม, 82
การฟิตเส้นโค้ง, 81
การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข, 187
  กฎของซิมป์สัน, 130
    ซิมป์สัน 1/3, 130
    ซิมป์สัน 3/8, 134
  กฎสี่เหลี่ยมคางหมู, 126
  การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน, 140
  สูตรของนิวตัน-โคตส์, 123
  อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
    การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่มีความเป็นสภาวะเอกฐาน, 145
    การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่มีลิมิตอนันต์, 144
    การอินทิเกรตเชิงตัวเลขในสองและสามมิติ, 146
การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข, 155
การอินทิเกรตเชิงตัวเลข, 123
  กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า, 124
  อินทิกรัลไม่ตรงแบบ, 144
การแทนค่าย้อนกลับ, 47, 59
ความคลาดเคลื่อน
  การประมาณค่าอนุพันธ์, 180
  ความคลาดเคลื่อนของวิธีออยเลอร์, 193
  ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย, 193
  ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ, 193
  ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์, 14, 23
คอลโลเคชัน, 81
ค่าคงที่ของการผ่อนปรนสืบเนื่อง, 68
ค่าความคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข, 4
ค่าวิกฤตของการวนซ้ำ, 63

ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์, 90
ค่าสัมประสิทธิ์ไพวอท , 48
ค่าไอเกน, 34
ดิฟเฟอเรนซ์ โอเปอเรเตอร์
ดิฟเฟอเรนซ์ โอเปอเรเตอร์ไปข้างหน้า, 172
ดิฟเฟอเรนซ์ โอเปอเรเตอร์ไปข้างหลัง, 172
ตัวดำเนินการผลต่าง, 172
ตัวดำเนินการผลต่างศูนย์กลาง, 172
ปัญหาค่าไอเกน, 232
ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต, 217
ระเบียบวิธีการยิง, 218
เงื่อนไขขอบเขตไม่ใช่ค่าคงที่, 230
ผลต่างศูนย์กลาง, 239, 241
ผลต่างสืบเนื่อง
ผลต่างไปข้างหลัง, 28
ผลต่างแบบจำกัด, 187
ผลต่างแบบสืบเนื่อง, 155, 157
ผลต่างศูนย์กลาง, 161, 163, 166
ผลต่างไปข้างหน้า, 161
ผลต่างไปข้างหลัง, 161, 163
อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง, 160
อนุพันธ์อันดับสอง, 162
ผลต่างไปข้างหลัง, 240
ระบบสมการเชิงเส้น, 45
ระเบียบวิธี LU ดีคอมโพซิชัน , 56
ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์, 47, 70
ระเบียบวิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน, 52, 72
ระเบียบวิธีผ่อนปรนสืบเนื่อง, 68
ระเบียบวิธีแทนค่าวนซ้ำของจาโคบี, 62
วิธีการแก้ปัญหาโดยตรง, 46
วิธีแก้ปัญหาโดยตรง, 70
วิธีแทนค่าวนซ้ำของเกาส์-ไซเดล, 66
ระเบียบวิธีผลต่างแบบจำกัด, 226
รากของสมการ
ระเบียบวิธีของมูลเลอร์, 35
ระเบียบวิธีซีแคนท์, 27
ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดคงที่, 22
ระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสัน, 24
ระเบียบวิธีแบร์สโตว์, 37
ระเบียบวิธีโมดิฟายซีแคนท์, 32
รากของสมการพหุนาม, 33
วิธีกราฟฟิก, 11
วิธีการแก้ตำแหน่งผิด, 17
วิธีกำหนดค่าคร่อมราก, 11
วิธีเปิด, 22
วิธีแบ่งครึ่งช่วง, 12
วิธีการประมาณค่าวนซ้ำ, 46
สมการคุณลักษณะ, 34
สมการปัวซอง, 238
สมการพหุนาม, 33
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย, 237
ขอบเขตการคำนวณที่มีรูปร่างไม่ปกติ, 242
สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทพาราโบลิก, 237, 246
ระเบียบวิธีแครงค์–นิโคลสัน, 254
ระเบียบวิธีโดยชัดแจ้ง, 247
ระเบียบวิธีโดยปริยาย, 249
สมการพาราโบลิกสองมิติ, 255
สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทอิลิปติก, 237, 238
สมการเชิงอนุพันธ์ประเภทไฮเปอร์โบลิก, 237, 256
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, 187
ระบบสมการเชิงอนุพันธ์, 193, 211
ระเบียบวิธีของราลส์ตัน, 206
ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา, 202
ระเบียบวิธีของคุตตา, 208
ระเบียบวิธีของรุงเง, 207

ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา–กิล, 208
ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง, 204
ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สี่, 207
ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่หนึ่ง, 204
ระเบียบวิธีของออยเลอร์, 188
ระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว, 201, 206
ระเบียบวิธีของฮวน, 198, 206
วิธีรุงเง–คุตตา
ระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตาอันดับที่สาม, 207
สมการไพวอท , 48
อนุกรมเทย์เลอร์, 157, 188, 195
เงื่อนไขแบบดิริชเล็ท, 238
เงื่อนไขแบบนิวแมน, 238
เงื่อนไขแบบร็อบบินส์ หรือ แบบผสม, 238
เมทริกซ์ แวนเดอร์มอนเด, 83
แบบจำลองทางวิศวกรรม, 1
แบบจำลองการทดลอง, 1
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, 2, 3
แบบจำลองเชิงตัวเลข, 2
แฟกเตอร์ไรเซชัน, 56
แฟคเตอร์ไรเซชัน
ระเบียบวิธีของเคราท์, 72
ระเบียบวิธีของโคเลสกี้, 72
แฟคเตอร์ไรเซชัน
ระเบียบวิธีของเคราท์, 57
ระเบียบวิธีของโคเลสกี้, 58
วิธีของดูลิตเติ้ล, 58
ไพวอท , 49