

Le Hai Chau  
Le Hai Khoi



**Vol. 5** | Mathematical  
Olympiad  
Series

Selected Problems of the  
Vietnamese Mathematical Olympiad  
(1962–2009)

# Contents

Foreword	v
Preface	vii
<b>1 The Gifted Students</b>	<b>1</b>
1.1 The Vietnamese Mathematical Olympiad . . . . .	1
1.2 High Schools for the Gifted in Maths . . . . .	10
1.3 Participating in IMO . . . . .	13
<b>2 Basic Notions and Facts</b>	<b>17</b>
2.1 Algebra . . . . .	17
2.1.1 Important inequalities . . . . .	17
2.1.2 Polynomials . . . . .	19
2.2 Analysis . . . . .	20
2.2.1 Convex and concave functions . . . . .	20
2.2.2 Weierstrass theorem . . . . .	20
2.2.3 Functional equations . . . . .	21
2.3 Number Theory . . . . .	21
2.3.1 Prime Numbers . . . . .	21
2.3.2 Modulo operation . . . . .	23
2.3.3 Fermat and Euler theorems . . . . .	23
2.3.4 Numeral systems . . . . .	24
2.4 Combinatorics . . . . .	24
2.4.1 Counting . . . . .	24
2.4.2 Newton binomial formula . . . . .	25
2.4.3 Dirichlet (or Pigeonhole) principle . . . . .	25
2.4.4 Graph . . . . .	26
2.5 Geometry . . . . .	27
2.5.1 Trigonometric relationship in a triangle and a circle . . . . .	27

2.5.2	Trigonometric formulas . . . . .	28
2.5.3	Some important theorems . . . . .	29
2.5.4	Dihedral and trihedral angles . . . . .	30
2.5.5	Tetrahedra . . . . .	31
2.5.6	Prism, parallelepiped, pyramid . . . . .	31
2.5.7	Cones . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Problems</b>	<b>33</b>
3.1	Algebra . . . . .	33
3.1.1	(1962) . . . . .	33
3.1.2	(1964) . . . . .	33
3.1.3	(1966) . . . . .	33
3.1.4	(1968) . . . . .	34
3.1.5	(1969) . . . . .	34
3.1.6	(1970) . . . . .	34
3.1.7	(1972) . . . . .	34
3.1.8	(1975) . . . . .	35
3.1.9	(1975) . . . . .	35
3.1.10	(1976) . . . . .	35
3.1.11	(1976) . . . . .	35
3.1.12	(1977) . . . . .	36
3.1.13	(1977) . . . . .	36
3.1.14	(1978) . . . . .	36
3.1.15	(1978) . . . . .	36
3.1.16	(1979) . . . . .	36
3.1.17	(1979) . . . . .	37
3.1.18	(1980) . . . . .	37
3.1.19	(1980) . . . . .	37
3.1.20	(1980) . . . . .	37
3.1.21	(1981) . . . . .	37
3.1.22	(1981) . . . . .	38
3.1.23	(1981) . . . . .	38
3.1.24	(1981) . . . . .	38
3.1.25	(1982) . . . . .	38
3.1.26	(1982) . . . . .	38
3.1.27	(1983) . . . . .	39
3.1.28	(1984) . . . . .	39
3.1.29	(1984) . . . . .	39
3.1.30	(1984) . . . . .	39
3.1.31	(1985) . . . . .	39
3.1.32	(1986) . . . . .	40
3.1.33	(1986) . . . . .	40

3.1.34 (1987)	40
3.1.35 (1988)	40
3.1.36 (1989)	41
3.1.37 (1990 B)	41
3.1.38 (1991 B)	41
3.1.39 (1992 B)	41
3.1.40 (1992 B)	41
3.1.41 (1992)	42
3.1.42 (1994 B)	42
3.1.43 (1994)	42
3.1.44 (1995)	42
3.1.45 (1996)	42
3.1.46 (1996)	43
3.1.47 (1997)	43
3.1.48 (1998 B)	43
3.1.49 (1998)	43
3.1.50 (1999)	44
3.1.51 (1999)	44
3.1.52 (2001 B)	44
3.1.53 (2002)	44
3.1.54 (2003)	45
3.1.55 (2004 B)	45
3.1.56 (2004)	45
3.1.57 (2004)	45
3.1.58 (2005)	45
3.1.59 (2006 B)	46
3.1.60 (2006 B)	46
3.1.61 (2006)	46
3.1.62 (2007)	46
3.1.63 (2008)	46
3.2 <b>Analysis</b>	47
3.2.1 (1965)	47
3.2.2 (1975)	47
3.2.3 (1980)	47
3.2.4 (1983)	47
3.2.5 (1984)	48
3.2.6 (1984)	48
3.2.7 (1985)	48
3.2.8 (1986)	48
3.2.9 (1986)	48
3.2.10 (1987)	49
3.2.11 (1987)	49

3.2.12 (1988) . . . . .	49
3.2.13 (1989) . . . . .	49
3.2.14 (1990 B) . . . . .	49
3.2.15 (1990) . . . . .	50
3.2.16 (1990) . . . . .	50
3.2.17 (1991) . . . . .	50
3.2.18 (1991) . . . . .	50
3.2.19 (1992 B) . . . . .	50
3.2.20 (1992) . . . . .	51
3.2.21 (1993 B) . . . . .	51
3.2.22 (1993) . . . . .	51
3.2.23 (1993) . . . . .	51
3.2.24 (1994 B) . . . . .	51
3.2.25 (1994 B) . . . . .	52
3.2.26 (1994) . . . . .	52
3.2.27 (1994) . . . . .	52
3.2.28 (1995 B) . . . . .	52
3.2.29 (1995 B) . . . . .	52
3.2.30 (1995) . . . . .	53
3.2.31 (1996 B) . . . . .	53
3.2.32 (1996) . . . . .	53
3.2.33 (1997 B) . . . . .	53
3.2.34 (1997) . . . . .	53
3.2.35 (1998 B) . . . . .	54
3.2.36 (1998 B) . . . . .	54
3.2.37 (1998) . . . . .	54
3.2.38 (1998) . . . . .	54
3.2.39 (1999 B) . . . . .	55
3.2.40 (1999 B) . . . . .	55
3.2.41 (1999 B) . . . . .	55
3.2.42 (2000 B) . . . . .	55
3.2.43 (2000) . . . . .	56
3.2.44 (2000) . . . . .	56
3.2.45 (2001 B) . . . . .	56
3.2.46 (2001) . . . . .	56
3.2.47 (2001) . . . . .	57
3.2.48 (2002 B) . . . . .	57
3.2.49 (2002 B) . . . . .	57
3.2.50 (2002) . . . . .	57
3.2.51 (2003 B) . . . . .	58
3.2.52 (2003 B) . . . . .	58
3.2.53 (2003 B) . . . . .	58

3.2.54 (2003)	58
3.2.55 (2004)	58
3.2.56 (2005)	59
3.2.57 (2006 B)	59
3.2.58 (2006)	59
3.2.59 (2007)	59
3.2.60 (2007)	60
3.2.61 (2008)	60
3.2.62 (2008)	60
<b>3.3 Number Theory</b>	60
3.3.1 (1963)	60
3.3.2 (1970)	60
3.3.3 (1971)	61
3.3.4 (1972)	61
3.3.5 (1974)	61
3.3.6 (1974)	62
3.3.7 (1975)	62
3.3.8 (1976)	62
3.3.9 (1977)	62
3.3.10 (1978)	62
3.3.11 (1981)	62
3.3.12 (1982)	62
3.3.13 (1983)	63
3.3.14 (1983)	63
3.3.15 (1984)	63
3.3.16 (1985)	63
3.3.17 (1985)	63
3.3.18 (1987)	63
3.3.19 (1989)	64
3.3.20 (1989)	64
3.3.21 (1990)	64
3.3.22 (1991)	64
3.3.23 (1992)	64
3.3.24 (1995)	65
3.3.25 (1996 B)	65
3.3.26 (1997 B)	65
3.3.27 (1997)	65
3.3.28 (1999 B)	66
3.3.29 (1999)	66
3.3.30 (2001)	66
3.3.31 (2002 B)	66
3.3.32 (2002 B)	67

	3.3.33 (2002) . . . . .	67
	3.3.34 (2003) . . . . .	67
	3.3.35 (2004 B) . . . . .	67
	3.3.36 (2004) . . . . .	67
	3.3.37 (2004) . . . . .	68
	3.3.38 (2005 B) . . . . .	68
	3.3.39 (2005) . . . . .	68
	3.3.40 (2006) . . . . .	68
	3.3.41 (2007) . . . . .	68
	3.3.42 (2008) . . . . .	68
3.4	<b>Combinatorics</b> . . . . .	69
	3.4.1 (1969) . . . . .	69
	3.4.2 (1977) . . . . .	69
	3.4.3 (1987) . . . . .	69
	3.4.4 (1990) . . . . .	69
	3.4.5 (1991) . . . . .	69
	3.4.6 (1992) . . . . .	70
	3.4.7 (1993) . . . . .	70
	3.4.8 (1996) . . . . .	70
	3.4.9 (1997) . . . . .	70
	3.4.10 (2001) . . . . .	71
	3.4.11 (2004 B) . . . . .	71
	3.4.12 (2005) . . . . .	71
	3.4.13 (2006) . . . . .	71
	3.4.14 (2007) . . . . .	72
	3.4.15 (2008) . . . . .	72
3.5	<b>Geometry</b> . . . . .	72
	3.5.1 (1963) . . . . .	72
	3.5.2 (1965) . . . . .	72
	3.5.3 (1968) . . . . .	73
	3.5.4 (1974) . . . . .	73
	3.5.5 (1977) . . . . .	73
	3.5.6 (1979) . . . . .	74
	3.5.7 (1982) . . . . .	74
	3.5.8 (1983) . . . . .	74
	3.5.9 (1989) . . . . .	74
	3.5.10 (1990) . . . . .	74
	3.5.11 (1991) . . . . .	75
	3.5.12 (1992) . . . . .	75
	3.5.13 (1994) . . . . .	75
	3.5.14 (1997) . . . . .	75
	3.5.15 (1999) . . . . .	75

3.5.16 (2001)	76
3.5.17 (2003)	76
3.5.18 (2004 B)	76
3.5.19 (2005)	76
3.5.20 (2006 B)	77
3.5.21 (2007)	77
3.5.22 (2007)	77
3.5.23 (2008)	77
3.5.24 (1962)	77
3.5.25 (1963)	78
3.5.26 (1964)	78
3.5.27 (1970)	78
3.5.28 (1972)	78
3.5.29 (1975)	79
3.5.30 (1975)	79
3.5.31 (1978)	79
3.5.32 (1984)	79
3.5.33 (1985)	79
3.5.34 (1986)	80
3.5.35 (1990)	80
3.5.36 (1990 B)	80
3.5.37 (1991)	80
3.5.38 (1991 B)	81
3.5.39 (1992)	81
3.5.40 (1993)	81
3.5.41 (1995 B)	81
3.5.42 (1996)	81
3.5.43 (1996 B)	82
3.5.44 (1998)	82
3.5.45 (1998 B)	82
3.5.46 (1999)	83
3.5.47 (2000 B)	83
3.5.48 (2000)	83
<b>4 Solutions</b>	<b>85</b>
4.1 Algebra	85
4.1.1	85
4.1.2	85
4.1.3	86
4.1.4	87
4.1.5	87
4.1.6	88



4.1.7	88
4.1.8	89
4.1.9	90
4.1.10	90
4.1.11	91
4.1.12	91
4.1.13	92
4.1.14	93
4.1.15	93
4.1.16	94
4.1.17	95
4.1.18	96
4.1.19	97
4.1.20	97
4.1.21	97
4.1.22	98
4.1.23	99
4.1.24	99
4.1.25	101
4.1.26	101
4.1.27	102
4.1.28	103
4.1.29	103
4.1.30	104
4.1.31	104
4.1.32	106
4.1.33	107
4.1.34	107
4.1.35	108
4.1.36	109
4.1.37	110
4.1.38	111
4.1.39	111
4.1.40	112
4.1.41	112
4.1.42	113
4.1.43	114
4.1.44	115
4.1.45	115
4.1.46	116
4.1.47	118
4.1.48	118

4.1.49	119
4.1.50	121
4.1.51	121
4.1.52	122
4.1.53	123
4.1.54	124
4.1.55	125
4.1.56	126
4.1.57	126
4.1.58	128
4.1.59	128
4.1.60	129
4.1.61	129
4.1.62	131
4.1.63	131
4.2 <b>Analysis</b>	132
4.2.1	132
4.2.2	133
4.2.3	133
4.2.4	135
4.2.5	136
4.2.6	137
4.2.7	138
4.2.8	138
4.2.9	139
4.2.10	140
4.2.11	141
4.2.12	141
4.2.13	142
4.2.14	143
4.2.15	144
4.2.16	145
4.2.17	146
4.2.18	147
4.2.19	147
4.2.20	148
4.2.21	149
4.2.22	150
4.2.23	151
4.2.24	152
4.2.25	153
4.2.26	154

4.2.27	154
4.2.28	156
4.2.29	157
4.2.30	158
4.2.31	159
4.2.32	160
4.2.33	162
4.2.34	163
4.2.35	163
4.2.36	164
4.2.37	165
4.2.38	167
4.2.39	167
4.2.40	168
4.2.41	169
4.2.42	170
4.2.43	171
4.2.44	173
4.2.45	173
4.2.46	174
4.2.47	175
4.2.48	176
4.2.49	177
4.2.50	178
4.2.51	179
4.2.52	180
4.2.53	182
4.2.54	183
4.2.55	184
4.2.56	185
4.2.57	186
4.2.58	186
4.2.59	187
4.2.60	188
4.2.61	189
4.2.62	190
4.3 <b>Number Theory</b>	190
4.3.1	190
4.3.2	191
4.3.3	191
4.3.4	193
4.3.5	194

4.3.6	194
4.3.7	195
4.3.8	195
4.3.9	196
4.3.10	196
4.3.11	197
4.3.12	197
4.3.13	197
4.3.14	198
4.3.15	199
4.3.16	199
4.3.17	200
4.3.18	200
4.3.19	201
4.3.20	202
4.3.21	203
4.3.22	204
4.3.23	205
4.3.24	206
4.3.25	207
4.3.26	208
4.3.27	208
4.3.28	209
4.3.29	210
4.3.30	211
4.3.31	212
4.3.32	213
4.3.33	213
4.3.34	214
4.3.35	215
4.3.36	216
4.3.37	217
4.3.38	218
4.3.39	219
4.3.40	221
4.3.41	222
4.3.42	222
4.4 <b>Combinatorics</b>	224
4.4.1	224
4.4.2	224
4.4.3	225
4.4.4	225

4.4.5	226
4.4.6	227
4.4.7	227
4.4.8	228
4.4.9	229
4.4.10	230
4.4.11	231
4.4.12	232
4.4.13	232
4.4.14	232
4.4.15	233
4.5 <b>Geometry</b>	235
4.5.1	235
4.5.2	235
4.5.3	237
4.5.4	239
4.5.5	241
4.5.6	242
4.5.7	243
4.5.8	244
4.5.9	246
4.5.10	247
4.5.11	248
4.5.12	250
4.5.13	252
4.5.14	253
4.5.15	254
4.5.16	255
4.5.17	256
4.5.18	257
4.5.19	259
4.5.20	260
4.5.21	262
4.5.22	264
4.5.23	264
4.5.24	267
4.5.25	268
4.5.26	269
4.5.27	271
4.5.28	273
4.5.29	274
4.5.30	276

# CONTENTS

xxi

4.5.31	277
4.5.32	278
4.5.33	280
4.5.34	281
4.5.35	282
4.5.36	284
4.5.37	286
4.5.38	287
4.5.39	289
4.5.40	290
4.5.41	291
4.5.42	292
4.5.43	293
4.5.44	294
4.5.45	296
4.5.46	297
4.5.47	298
4.5.48	300

## 5 Olympiad 2009

301